Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

SS 2008
23. April 2008

Primzahlen. Eine Einführung in die Zahlentheorie
Übungsblatt 1

Aufgabe 1

a) Man zeige: $2^n - 1$ ist höchstens dann eine Primzahl, wenn $n = p$ eine Primzahl ist. (Eine Primzahl der Form $M_p = 2^p - 1$ heißt *Mersennesche Primzahl*.)

b) Man zeige: $2^n + 1$ ist höchstens dann eine Primzahl, wenn $n = 2^k$ eine Zweierpotenz ist. (Eine Primzahl der Form $F_k = 2^{2^k} + 1$ heißt *Fermatsche Primzahl*.)

Aufgabe 2

a) Seien a, b teilerfremde ganze Zahlen. Man zeige: Die Menge der Lösungen $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ der Gleichung

$$ax + by = 0$$

ist $\mathbb{Z}(-b, a) = \{(-nb, na) : n \in \mathbb{Z}\}$.

b) Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Man zeige: Die Gleichung

$$ax + by = c$$

ist genau dann ganzzahlig lösbar, wenn $\gcd(a, b) \mid c$.

c) Man bestimme alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung $15x + 12y = 45$.

Aufgabe 3

Für eine natürliche Zahl n sei $\nu(n)$ definiert als die Anzahl der Nullen am Ende der Dezimal-Darstellung von $n!$ (z.B. gilt $\nu(10) = 2$, da $10! = 3628800$).

a) Man berechne $\nu(10^k)$ für $k = 2, 3, 4, 5, 6$.

b) Man beweise: Für jede ganze Zahl $k \geqslant 2$ gilt $\nu(kn) \geqslant k\nu(n)$ für alle n und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\nu(kn)}{\nu(n)} = k.$$

Aufgabe 4

Sei p eine Primzahl und $k \geqslant 1$. Man zeige: Der Binomial-Koeffizient $\binom{p^k}{n}$ ist durch p teilbar für alle n mit $0 < n < p^k$.

Abgabetermin: Mittwoch, 30. April 2008, 14 Uhr, Übungskasten im 1. Stock