MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
PROF. DR. O. FORSTER

WS 2007/08
9. Januar 2008

Elliptische Funktionen und Elliptische Kurven
Übungsblatt 11

Aufgabe 41

Sei $\Lambda := \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subset \mathbb{C}$ ein Gitter ($\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ reell-linear unabhängig).

a) Sei $\Lambda_1 \subset \Lambda$ das Untergitter $\Lambda_1 := 2\mathbb{Z}\omega_1 + 3\mathbb{Z}\omega_2$. Man bestimme eine Basis ω_1', ω_2' von Λ, so dass $\Lambda_1 = \mathbb{Z}\omega_1' + 6\mathbb{Z}\omega_2'$.

b) Sei $\Lambda_2 \subset \Lambda$ das Untergitter $\Lambda_2 := 2\mathbb{Z}\omega_1 + 4\mathbb{Z}\omega_2$. Man zeige: Es gibt keine Basis ω_1', ω_2' von Λ, so dass $\Lambda_2 = \mathbb{Z}\omega_1' + 8\mathbb{Z}\omega_2'$.

Aufgabe 42

Seien a, b teilerfremde positive ganze Zahlen. Man beweise:
Es gibt Matrizen $A, B \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ mit

$$A \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 43

Sei $\tau := i\sqrt{5}$ und $\tau' := \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{5})$. Man zeige, dass die elliptischen Kurven

$$E := \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau) \quad \text{und} \quad E' := \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau')$$

nicht isomorph sind, aber isomorphe Endomorphismen-Ringe besitzen:

$$\mathrm{End}(E_\tau) \cong \mathrm{End}(E_{\tau'}).$$

Aufgabe 44

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik $\neq 2$ und

$$P_3(X) := X^3 + c_1X^2 + c_2X + c_3 \in k[X]$$

ein Polynom 3. Grades ohne mehrfache Nullstellen. Sei $E \subset \mathbb{P}_2(k)$ die elliptische Kurve mit affiner Gleichung $Y^2 = P_3(X)$. Im unendlich fernen Punkt $\mathfrak{O} = (0 : 0 : 1)$ ist bekanntlich $t := \frac{X}{Y}$ eine Orts-Uniformisierende. Man berechne den Hauptteil der Laurent-Reihe der Funktion $X + Y$ im Punkt $\mathfrak{O}$ bezüglich t.

Abgabetermin: Freitag, 18. Jan. 2008, 14:10 Uhr,
Übungskasten im ersten Stock vor der Bibliothek