

Elliptische Funktionen und Elliptische Kurven Übungsblatt 10

Aufgabe 37

- a) Man bestimme alle Nullstellen (und ihre Vielfachheiten) der Eisensteinreihen $G_8(\tau)$ und $G_{10}(\tau)$.
- b) Man zeige: Es gibt Konstanten $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}^*$ mit

$$G_8(\tau) = \lambda_1 G_4(\tau)^2 \quad \text{und} \quad G_{10}(\tau) = \lambda_2 G_4(\tau) G_6(\tau).$$

Man bestimme die Konstanten λ_1, λ_2 .

Aufgabe 38

Es bezeichne $\mathfrak{K}(\Gamma)$ den Körper aller Modulfunktionen vom Gewicht 0.

Man zeige: Der \mathbb{C} -Vektorraum $V_k(\Gamma)$ aller Modulfunktionen vom Gewicht $2k$ ist in natürlicher Weise sogar ein Vektorraum über dem Körper $\mathfrak{K}(\Gamma)$. Was ist die Dimension von $V_k(\Gamma)$ über $\mathfrak{K}(\Gamma)$?

Aufgabe 39

Sei $f : E \rightarrow E'$ eine Isogenie zweier elliptischer Kurven über \mathbb{C} vom Grad $n = n_1 n_2$ mit $n_1, n_2 > 1$. Man zeige: Es gibt eine elliptische Kurve E'' sowie Isogenien $f_1 : E \rightarrow E''$ vom Grad n_1 und $f_2 : E'' \rightarrow E'$ vom Grad n_2 mit $f = f_2 \circ f_1$.

Aufgabe 40

Für $\tau \in \mathbb{H}$ bezeichne E_τ die elliptische Kurve $E_\tau := \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau)$. Man beweise:

Zwei elliptische Kurven E_τ und $E_{\tau'}$ mit komplexer Multiplikation sind genau dann isogen, wenn die Körper $\mathbb{Q}(\tau)$ und $\mathbb{Q}(\tau')$ isomorph sind.

Abgabetermin: Freitag, 11. Jan. 2008, 14:10 Uhr,
Übungskasten im ersten Stock vor der Bibliothek

Frohe Weihnachten und ein gutes Neues Jahr!