

Elliptische Funktionen und Elliptische Kurven Übungsblatt 9

Aufgabe 33

Sei $F = \{z \in \mathbb{H} : |\operatorname{Re}(z)| \leq \frac{1}{2}, |z| \geq 1\}$ der Fundamentalbereich der Modulgruppe $\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z})$. Man zeige:

- Ist ein Punkt $\tau \in F$ Fixpunkt eines Elements $\text{id} \neq \phi \in \Gamma$ (d.h. $\phi(\tau) = \tau$), so gilt $\tau = i$ oder $\tau = \rho := e^{2\pi i/3}$ oder $\tau = \rho + 1$.
- Jeder Punkt $\tau \in \mathbb{H}$, der Fixpunkt einer Transformation $\text{id} \neq \phi \in \Gamma$ ist, ist modulo Γ zu i oder ρ äquivalent.

Aufgabe 34

Sei Γ_ϑ die Menge aller Transformationen $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ aus Γ mit $a+b+c+d \equiv 0 \pmod{2}$. Man zeige:

- Γ_ϑ ist eine Untergruppe von Γ .
- Γ_ϑ ist kein Normalteiler in Γ .
- Γ_ϑ hat Index 3 in Γ , genauer: Γ ist disjunkte Vereinigung der 3 Nebenklassen Γ_ϑ , $T \cdot \Gamma_\vartheta$ und $ST \cdot \Gamma_\vartheta$. Dabei ist $T : z \mapsto z + 1$ und $S : z \mapsto -1/z$.

Aufgabe 35

Sei Γ_ϑ wie in Aufgabe 34. Man zeige:

$$F(\Gamma_\vartheta) := \{z \in \mathbb{H} : |\operatorname{Re}(z)| \leq 1, |z| \geq 1\}$$

ist ein Fundamentalbereich für Γ_ϑ in folgendem Sinn:

- Jeder Punkt $z \in \mathbb{H}$ ist modulo Γ_ϑ zu einem Punkt $z' \in F(\Gamma_\vartheta)$ äquivalent.
- Sind $z_1 \neq z_2$ zwei Elemente aus $F(\Gamma_\vartheta)$, die untereinander modulo Γ_ϑ äquivalent sind, so liegen beide Elemente auf dem Rand von $F(\Gamma_\vartheta)$, und gehen durch Anwendung von T^2 oder S auseinander hervor.

Aufgabe 36

Für eine ganze Zahl $k \geq 0$ bezeichne $M_k(\Gamma)$ den \mathbb{C} -Vektorraum aller Modulformen vom Gewicht $2k$ und $S_k(\Gamma) \subset M_k(\Gamma)$ den Untervektorraum der Spitzenformen. Man zeige für $k \geq 6$:

a) $S_k(\Gamma)$ ist eine Hyperebene in $M_k(\Gamma)$; genauer gilt

$$M_k(\Gamma) = \mathbb{C} \cdot G_{2k} \oplus S_k(\Gamma),$$

wobei G_{2k} die Eisensteinreihe vom Gewicht $2k$ bezeichnet.

b) Sei $\Delta \in M_6(\Gamma)$ die Diskriminante. Damit ist die Abbildung

$$M_{k-6}(\Gamma) \longrightarrow S_k(\Gamma), \quad f \mapsto f \cdot \Delta$$

ist ein Isomorphismus.

Abgabetermin: Freitag, 21. Dez. 2007, 14:10 Uhr,
Übungskasten im ersten Stock vor der Bibliothek