Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

WS
2007/08
5. Dez. 2007

# Elliptische Funktionen und Elliptische Kurven
## Übungsblatt 8

**Aufgabe 29**

Sei $K$ ein Körper der Charakteristik $\neq 2$ und $E_a \subset \mathbb{P}_2(K)$ die Kurve 3. Ordnung mit affiner Geichung $y^2 = x^3$ und unendlich-fernem Punkt $\mathfrak{O} = (0 : 0 : 1)$. Man zeige:

a) Die Kurve $E_a$ hat einen einzigen singulären Punkt $S$ mit den affinen Koordinaten $(0, 0)$.

b) Die Abbildung $\phi : K \to E_{a,\mathrm{reg}} := E_a \smallsetminus \{S\}$,

$$t \mapsto \phi(t) := \begin{cases} (t^{-2}, t^{-3}) & \text{für } t \neq 0, \\ \mathfrak{O} & \text{für } t = 0 \end{cases}$$

ist bijektiv.

Vermöge $\phi$ werde die Struktur der additiven Gruppe $(K, +)$ auf $E_{a,\mathrm{reg}}$ übertragen; dabei wird der Punkt $\mathfrak{O}$ das neutrale Element. Die Verknüpfung auf $E_{a,\mathrm{reg}}$ werde mit $\oplus$ bezeichnet.

c) Schneidet eine Gerade $\ell \subset \mathbb{P}_2(K)$, die nicht durch den Punkt $S$ geht, die Kurve $E_a$ in drei Punkten $P_1, P_2, P_3$, wobei jeder Punkt sooft aufgezählt wird, wie seiner Vielfachheit entspricht, so gilt $P_1 \oplus P_2 \oplus P_3 = \mathfrak{O}$.

**Aufgabe 30**

Sei $K$ ein Körper der Charakteristik $\neq 2$ und $E_m \subset \mathbb{P}_2(K)$ die Kurve 3. Ordnung mit affiner Geichung $y^2 = x^2(x + 1)$ und unendlich-fernem Punkt $\mathfrak{O} = (0 : 0 : 1)$. Man zeige:

a) Die Kurve $E_m$ hat einen einzigen singulären Punkt $S$ mit den affinen Koordinaten $(0, 0)$.

b) Sei $\alpha : \mathbb{P}_1(K) = K \cup \{\infty\} \to E_m$ die wie folgt definierte Abbildung:

$$\alpha(t) := (t^2 - 1, t^3 - t) \text{ für } t \in K, \quad \alpha(\infty) := \mathfrak{O}.$$

Dann ist $\alpha$ surjektiv und jeder Punkt $P \in E_m$ hat genau ein Urbild mit der Ausnahme $\alpha^{-1}(S) = \{\pm 1\}$.

c) Man bestimme die projektiv-lineare Abbildung $\beta : \mathbb{P}_1(K) \to \mathbb{P}_1(K)$ mit

$$\beta(0) = 1, \quad \beta(\infty) = -1, \quad \beta(1) = \infty$$

und setze $\phi := \alpha \circ \beta : \mathbb{P}_1(K) \to E_m$. Dann liefert die Beschränkung von $\phi$ auf $K^* = \mathbb{P}_1(K) \smallsetminus \{0, \infty\}$ eine bijektive Abbildung $\phi : K^* \to E_{m,\mathrm{reg}} := E_m \smallsetminus \{S\}$.

---

**b.w.**

Vermöge $\phi$ werde die Struktur der multiplikativen Gruppe $K^*$ auf $E_{m,\mathrm{reg}}$ übertragen; dabei wird der Punkt $\mathfrak{O}$ das neutrale Element. Die Verknüpfung auf $E_{m,\mathrm{reg}}$ werde mit $\oplus$ bezeichnet.

d) Schneidet eine Gerade $\ell \subset \mathbb{P}_2(K)$, die nicht durch den Punkt $S$ geht, die Kurve $E_m$ in drei Punkten $P_1, P_2, P_3$, wobei jeder Punkt sooft aufgezählt wird, wie seiner Vielfachheit entspricht, so gilt $P_1 \oplus P_2 \oplus P_3 = \mathfrak{O}$.

**Aufgabe 31**

Sei $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subset \mathbb{C}$ ein Gitter mit positiv orientierter Basis $(\omega_1, \omega_2)$ und $\tau := \omega_2/\omega_1$. Wir definieren Gittervektoren $\omega_1'$ und $\omega_2'$ wie folgt:

Sei $\omega_1' \in \Lambda \setminus \{0\}$ ein Vektor minimaler Länge (bzgl. des gewöhnlichen Absolutbetrags $|\omega_1'|$) und $\omega_2' \in \Lambda \setminus \{0\}$ ein Vektor minimaler Länge unter den folgenden Nebenbedingungen:

i) $\omega_2'$ ist von $\omega_1'$ reell linear unabhängig,
ii) $(\omega_1', \omega_2')$ ist positiv orientiert.

Man zeige: $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1' + \mathbb{Z}\omega_2'$, und $\tau' := \omega_2'/\omega_1'$ ist zu $\tau$ bzgl. der Modulgruppe $\Gamma = PGL(2, \mathbb{Z})$ äquivalent und liegt im Fundamentalbereich

$$F := \{z \in \mathbb{H} : |\mathrm{Re}(z)| \leq \tfrac{1}{2}, |z| \geq 1\}.$$

**Aufgabe 32**

Für eine ganze Zahl $k \geq 2$ und $\tau \in \mathbb{H}$ sei

$$G_{2k}(\tau) := \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(m+n\tau)^{2k}}$$

die Eisenstein-Reihe und

$$G_{2k}^*(\tau) := \sum_{\gcd(m,n)=1} \frac{1}{(m+n\tau)^{2k}},$$

wobei nur über alle teilerfremden $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ summiert wird. Man beweise:

$$G_{2k}(\tau) = \zeta(2k) G_{2k}^*(\tau), \quad \text{wobei} \quad \zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}.$$

---

**Abgabetermin:** Freitag, 14. Dez. 2007, 14:10 Uhr,
Übungskasten im ersten Stock vor der Bibliothek