

Elliptische Funktionen und Elliptische Kurven Übungsblatt 7

Aufgabe 25

Sei $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subset \mathbb{C}$ ein Gitter und $\Lambda_1 := 2\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$. Da jede bzgl. Λ doppelt-periodische meromorphe Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}_1$ auch doppelt-periodisch bzgl. Λ_1 ist, hat man eine natürliche Einbettung $\mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda) \hookrightarrow \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda_1)$ der Funktionenkörper. Man zeige, dass $\mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda_1)$ eine Erweiterung vom Grad 2 des Körpers $\mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda)$ ist.

Aufgabe 26

Seien $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subset \mathbb{C}$ und $\Lambda_1 = 2\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subset \mathbb{C}$ wie in Aufgabe 25 und $f : \mathbb{C}/\Lambda_1 \rightarrow \mathbb{P}_1$ eine Quadratwurzel von $\wp_\Lambda - \wp_\Lambda(\omega_2/2)$, vgl. Aufgabe 24.

a) Man zeige: Die Funktion f genügt der Differentialgleichung

$$f'(z)^2 = (f(z)^2 - \lambda_1^2)(f(z)^2 - \lambda_2^2)$$

mit gewissen, von ω_1 und ω_2 abhängigen Konstanten $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$.

b) Der Funktionenkörper $\mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda_1)$ wird von f und f' erzeugt.

c)* Man stelle die Funktion \wp_{Λ_1} explizit als rationale Funktion von f und f' dar.

Aufgabe 27

Sei $E \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ eine elliptische Kurve. Man zeige:

a) Verbindet man zwei Wendepunkte von E durch eine Gerade, so schneidet die Gerade die Kurve in einem weiteren Wendepunkt.

b) Wieviele verschiedene Verbindungsgeraden von Wendepunkten von E gibt es insgesamt?

Aufgabe 28

Sei $E \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ eine elliptischen Kurve mit der affinen Gleichung

$$y^2 = x^3 + ax + b.$$

Da der unendlich-ferne Punkt ein Wendepunkt ist, liegen also 8 Wendepunkte im affinen Teil von E . Man zeige: Die x -Koordinaten dieser Wendepunkte sind die Lösungen der Gleichung

$$3x^4 + 6ax^2 + 12bx - a^2 = 0.$$

Hinweis. Ein Wendepunkt $P \in E$ genügt der Beziehung $2P = -P$.

Abgabetermin: Freitag, 7. Dez. 2007, 14:10 Uhr,
Übungskasten im ersten Stock vor der Bibliothek