Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

WS 2007/08
21. Nov. 2007/
10. Dez. 2007

Elliptische Funktionen und Elliptische Kurven

Übungsblatt 6

Aufgabe 21

Sei $F(X_1, \ldots, X_n) \in K[X_1, \ldots, X_n]$ ein homogenes Polynom vom Grad d in n Unbestimmten $X_1, \ldots, X_n$ über einem Körper K. Man beweise die Formel

$$\sum_{i,j=1}^{n} X_i X_j \frac{\partial^2 F}{\partial X_i \partial X_j} = d(d-1)F.$$

Aufgabe 22

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\mathrm{Char}(K) \neq 2, 3$ und $K_0 \subset K$ ein Unterkörper. Man beweise:

a) Sei $P(X) \in K_0[X]$ ein Polynom 3. Grades. Hat P eine mehrfache Nullstelle in K, so liegt die Nullstelle schon in K_0.

b) Sei C eine projektiv-algebraische ebene Kurve mit affiner Gleichung

$$Y^2 = X^3 + aX + b, \quad a, b \in K_0.$$

Besitzt C einen singulären Punkt Q in $\mathbb{P}_2(K)$, so liegt Q schon in $\mathbb{P}_2(K_0)$.

Aufgabe 23

Sei $\Lambda \subset \mathbb{C}$ ein Gitter und

$$\sigma : \mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{C}/\Lambda, \quad z \mapsto \sigma(z) := -z,$$

die Punktspiegelung am Nullpunkt. σ wirkt auch auf der Gruppe der Divisoren $\mathrm{Div}(\mathbb{C}/\Lambda)$: Für $D = \sum_{i=1}^{n} k_i[P_i] \in \mathrm{Div}(\mathbb{C}/\Lambda)$ setzt man $\sigma(D) := \sum_{i=1}^{n} k_i[\sigma(P_i)]$. Ein Divisor $D \in \mathrm{Div}(\mathbb{C}/\Lambda)$ heißt σ-invariant oder kurz symmetrisch, wenn $\sigma(D) = D$. Man zeige:

Der Divisor einer nicht identisch verschwindenden meromorphen Funktion $f : \mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{P}_1$ ist genau dann symmetrisch, wenn f eine gerade oder eine ungerade Funktion ist.

Wie kann man an einem symmetrischen Hauptdivisor $D \in \mathrm{Div}(\mathbb{C}/\Lambda)$ erkennen, ob er zu einer geraden oder einer ungeraden Funktion gehört?

---

b.w.

Aufgabe 24

Sei $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subset \mathbb{C}$ ein Gitter mit zugehöriger $\wp$-Funktion $\wp := \wp_\Lambda$ und

$$e_2 := \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right).$$

Man zeige: Die Funktion $\wp - e_2$ besitzt eine bis aufs Vorzeichen eindeutig bestimmte Quadratwurzel, d.h. es gibt eine meromorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}_1$ mit $f^2 = \wp - e_2$. Diese Funktion erfüllt die Beziehungen

$$f(z+\omega_1) = -f(z), \quad f(z+\omega_2) = f(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C};$$

also ist f doppelt-periodisch bzgl. des Gitters $\Lambda_1 := 2\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$.

Hinweis. Man betrachte den Divisor einer hypothetischen Wurzel von $\wp - e_2$ und zeige, dass er ein Hauptdivisor auf $\mathbb{C}/\Lambda_1$ ist.

Abgabetermin: Freitag, 30. Nov. 2007, 14:10 Uhr,
Übungskasten im ersten Stock vor der Bibliothek