Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

WS 2007/08
14. Nov. 2007

Elliptische Funktionen und Elliptische Kurven

Übungsblatt 5

Es sei K stets ein Körper.

Aufgabe 17

Seien $E, \widetilde{E} \subset \mathbb{P}_2(K)$ zwei elliptische Kurven mit affinen Gleichungen

$$Y^2 = P_3(X) \quad \text{bzw.} \quad Y^2 = \widetilde{P}_3(X),$$

wobei $P_3(X), \widetilde{P}_3(X) \in K[X]$ Polynome 3. Grades ohne mehrfache Nullstellen im algebraischen Abschluss von K seien. Für diese Aufgabe heißen die Kurven $E, \widetilde{E}$ über K isomorph, wenn sie sich durch eine Koordinaten-Transformation

$$X \mapsto \alpha X + \beta, \quad Y \mapsto \gamma Y, \qquad (\alpha, \gamma \in K^*,\ \beta \in K),$$

ineinander überführen lassen. Man beweise:

a) Über $\mathbb{C}$ ist jede elliptische Kurve $Y^2 = X^3 + AX + B$ isomorph zu einer Kurve der Gestalt

$$Y^2 = X(X-1)(X-\lambda), \qquad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}.$$

b) Über $\mathbb{C}$ ist jede elliptische Kurve $Y^2 = X^3 + AX + B$ isomorph zu einer Kurve mit affiner Gleichung i) oder ii)

i) $Y^2 = X^3 + X + b$,

ii) $Y^2 = X^3 + 1$.

c)* Sei $p > 3$ eine Primzahl mit $p \equiv 3 \bmod 4$. Jede über dem Körper $\mathbb{F}_p$ definierte elliptische Kurve $Y^2 = X^3 + AX + B$ ist über $\mathbb{F}_p$ isomorph zu einer Kurve mit affiner Gleichung

$$Y^2 = X^3 + \varepsilon X + b, \qquad \varepsilon \in \{1, -1, 0\}.$$

Aufgabe 18

Man zeige: Zu jeder Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in GL(2, K)$ gibt es genau einen Körper-Automorphismus $\psi : K(X) \to K(X)$ mit $\psi \mid K = \mathrm{id}_K$ und

$$X \mapsto \psi(X) = \frac{aX + b}{cX + d}.$$

Aufgabe 19

a) Man konstruiere einen Körper-Isomorphismus $\varphi : K(X)[\sqrt{X}] \to K(X)$ mit $\varphi \mid K = \mathrm{id}_K$.

b) Sei $P_2(X) := (X-a)(X-b) \in K[X]$ mit $a, b \in K, a \neq b$. Man beweise: Es gibt einen Körper-Isomorphismus

$$\psi : K(X)[\sqrt{P_2(X)}] \to K(X) \quad \text{mit} \quad \psi \mid K = \mathrm{id}_K.$$

Anleitung. Man konstruiere zuerst einen Isomorphismus $\phi : K(X)[\sqrt{X}] \to K(X)[\sqrt{P_2(X)}]$ mit $\phi(X) = \frac{X-a}{X-b}$ und wende a) an.

Aufgabe 20

a) Sei $P_4(X) \in K[X]$ ein Polynom 4. Grades mit paarweise verschiedenen Nullstellen in K. Man zeige: Es gibt ein Polynom 3. Grades $P_3(X) \in K[X]$ mit paarweise verschiedenen Nullstellen in K und einen Körper-Isomorphismus

$$\psi : K(X)[\sqrt{P_4(X)}] \to K(X)[\sqrt{P_3(X)}] \quad \text{mit} \quad \psi \mid K = \mathrm{id}_K.$$

b)* Sei $P_4(z) \in \mathbb{C}[z]$ ein Polynom 4. Grades mit paarweise verschiedenen Nullstellen. Man zeige, wie man das Integral

$$\int \frac{dz}{\sqrt{P_4(z)}}$$

auf ein Integral

$$\int \frac{dz}{\sqrt{P_3(z)}}$$

zurückführen kann, wobei $P_3(z)$ ein Polynom 3. Grades mit paarweise verschiedenen Nullstellen ist.

Mit einem Stern * versehene Aufgaben sind nicht obligatorisch; ihre Lösung ergibt Extra-Punkte.

Abgabetermin: Freitag, 23. Nov. 2007, 14:10 Uhr,
Übungskasten im ersten Stock vor der Bibliothek