Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

WS 2007/08
7. Nov. 2007

Elliptische Funktionen und Elliptische Kurven
Übungsblatt 4

Aufgabe 13

Sei K ein beliebiger Körper und seien $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}_2(K)$ vier Punkte in der projektiven Ebene, von denen keine drei auf einer Geraden liegen, ebenso $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 \in \mathbb{P}_2(K)$.

a) Man zeige: Es gibt genau einen projektiv-linearen Automorphismus $\alpha : \mathbb{P}_2(K) \to \mathbb{P}_2(K)$ mit

$$\alpha(P_\nu) = Q_\nu \quad \text{für } \nu = 1, \ldots, 4.$$

b) Sei $\mathrm{Char}(K) \neq 2$ und $C \subset \mathbb{P}_2(K)$ der Kreis mit der affinen Gleichung $X^2 + Y^2 = 1$. Man bestimme den projektiv-linearen Automorphismus $\alpha : \mathbb{P}_2(K) \to \mathbb{P}_2(K)$ mit

$$\begin{aligned} \alpha((1:0:1)) &= (0:0:1), \\ \alpha((0:1:0)) &= (0:1:0), \\ \alpha((1:0:-1)) &= (1:0:0), \\ \alpha((1:1:0)) &= (1:1:1). \end{aligned}$$

Wie lautet die Gleichung der Bildkurve $\alpha(C)$?

Aufgabe 14

Sei $m \geq 2$ eine natürliche Zahl. Unter der Fermatkurve $C_m \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ der Ordnung m versteht man die Kurve mit der Gleichung

$$x_1^m + x_2^m = x_0^m.$$

Man zeige, dass die Fermatkurve glatt ist und bestimme ihre "unendlich fernen" Punkte $C_m \cap \{x_0 = 0\}$.

Aufgabe 15

a) Man bestimme alle Wendepunkte der Fermatkurve $C_3 \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$.

b) Man transformiere die Kurve C_3 mittels eines über $\mathbb{Q}$ definierten projektiv-linearen Automorphismus $\alpha \in PGL(3, \mathbb{Q})$ in eine Kurve $C_3' := \alpha(C_3) \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ mit affiner Gleichung

$$Y^2 = X^3 + aX + b$$

und gebe die Koeffizienten a, b explizit an.

c) Welches sind die Wendepunkte der transformierten Kurve C_3' ?

---

b.w.

Aufgabe 16

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\mathrm{Char}(K) \neq 2, 3$ (z.B. $K = \mathbb{C}$) und seien $a_1, a_2, a_3, a_4 \in K$ paarweise verschiedene Zahlen. Sei

$$f_4(X) := \prod_{\nu=1}^{4} (X - a_\nu) \in K[X]$$

und seien $C', C'' \subset \mathbb{P}_2(K)$ die Kurven mit den affinen Geichungen

$$Y^2 = f_4(X) \quad \text{bzw.} \quad Y^3 = f_4(X).$$

Man bestimme alle Singularitäten von C' und C''.

Abgabetermin: Freitag, 16. Nov. 2007, 14:10 Uhr,
Übungskasten im ersten Stock vor der Bibliothek