MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
PROF. DR. O. FORSTER

WS 2007/08
24. Okt. 2007/
7. Nov. 2007

Elliptische Funktionen und Elliptische Kurven
Übungsblatt 2

Aufgabe 5

Sei $\Lambda \subset \mathbb{C}$ ein Gitter und $R_\Lambda := \{\alpha \in \mathbb{C} : \alpha\Lambda \subset \Lambda\}$. Man zeige

a) R_Λ ist ein kommutativer Ring mit Einselement.

b) $R_\Lambda \cap \mathbb{R} = \mathbb{Z}$.

c) Für die Gruppe R_Λ^* der Einheiten von $\mathbb{R}_\Lambda$ gilt

$$R_\Lambda^* = \{\alpha \in \mathbb{C}^* : \alpha\Lambda = \Lambda\}.$$

Aufgabe 6

Sei $\Lambda \subset \mathbb{C}$ ein Gitter mit $\Lambda \cap \mathbb{R} = \mathbb{Z}$ und $\overline{\Lambda} = \Lambda$. Dabei ist

$$\overline{\Lambda} := \{\overline{\omega} : \omega \in \Lambda\}$$

das zu Λ konjugiert komplexe Gitter. Man zeige:

a) Es gibt eine reelle Zahl $t > 0$, so dass Λ eines der folgenden Gitter ist.

i) $\Lambda = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}it$ (Rechtecks-Gitter),

ii) $\Lambda = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}(\frac{1}{2} + it)$ (rhombisches Gitter).

b) Der Wert der Eisensteinreihe $G_{2k}(\Lambda)$ ist reell für alle $k \geq 2$.

Aufgabe 7

Sei $\Lambda_i := \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$ und $\Lambda_\rho := \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\rho$, wobei $\rho := e^{2\pi i/6}$.

a) Man zeige: $G_6(\Lambda_i) = 0$ und $G_4(\Lambda_\rho) = 0$.

b) Man berechne die Gruppen der Einheiten $R_{\Lambda_i}^*$ und $R_{\Lambda_\rho}^*$, vgl. Aufgabe 5.

Aufgabe 8

a) Man zeige für die Weierstraßsche $\wp$-Funktion zum Gitter $\Lambda \subset \mathbb{C}$

$$\wp''(z) = 6\wp(z)^2 - 30G_4(\Lambda).$$

b) Mithilfe von a) beweise man

$$7G_8(\Lambda) = 3G_4(\Lambda)^2.$$