Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

WS 2007/08
17. Okt. 2007

Elliptische Funktionen und Elliptische Kurven
Übungsblatt 1

Aufgabe 1

Sei $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion in der oberen Halbebene $\mathbb{H} \subset \mathbb{C}$ mit der Periode 1 und Fourierreihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n z}.$$

Sei N eine ganze Zahl. Man zeige:
Genau dann gilt $c_n = 0$ für alle $n < -N$, falls es Konstanten $M, y_0 > 0$ gibt, so dass

$$|f(z)| \leqslant M e^{2\pi N |\operatorname{Im}(z)|} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H} \text{ mit } \operatorname{Im}(z) \geqslant y_0.$$

Aufgabe 2

a) Man zeige: Die Funktion

$$\cot \pi z = \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$$

ist eine meromorphe Funktion in der komplexen Ebene mit der Periode 1. Ihre einzigen Singularitäten sind Pole 1. Ordnung an den Stellen $n \in \mathbb{Z}$.

b) Man entwickle die Funktion $\cot \pi z$ in eine Fourierreihe
  i) $f_+(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$ in der oberen Halbebene $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$,
  ii) $f_-(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_n e^{2\pi i n z}$ in der unteren Halbebene $\mathbb{H}_- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) < 0\}$.

In welchen Punkten der reellen Achse konvergieren die Fourierreihen f_+ bzw. f_- ?

Aufgabe 3

Es sei $P(z) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu z^\nu$ ein Polynom mit komplexen Koeffizienten $c_\nu \in \mathbb{C}$.

a) Man zeige: Genau dann ist $e^{P(z)}$ eine ganze holomorphe Funktion mit der Periode 1, wenn P ein lineares Polynom folgender Gestalt ist:

$$P(z) = 2\pi i n z + c_0 \qquad \text{mit } n \in \mathbb{Z},\ c_0 \in \mathbb{C}.$$

b) Gilt eine entsprechende Aussage auch, wenn man das Polynom P ersetzt durch eine in ganz $\mathbb{C}$ konvergente Potenzreihe $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$?

---

b.w.

Aufgabe 4

Seien $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ reell linear unbhängige komplexe Zahlen und $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subset \mathbb{C}$ das von ihnen aufgespannte Gitter. Man zeige:

a) Für den Flächeninhalt $\mathrm{Vol}(\Lambda)$ eines Fundamental-Parallelogramms von Λ gilt

$$\mathrm{Vol}(\Lambda) = |\operatorname{Im}(\overline{\omega}_1 \omega_2)|.$$

b) Genau dann ist die Basis (ω_1, ω_2) von Λ positiv orientiert, wenn

$$\operatorname{Im}(\overline{\omega}_1 \omega_2) > 0.$$

Abgabetermin: Freitag, 26. Okt. 2007, 14:10 Uhr, Übungskasten im ersten Stock vor der Bibliothek