Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

WS 2006/07
2. Februar 2007

# Darstellungen endlicher Gruppen

## Klausur

Alle 3 Aufgaben sollen bearbeitet werden.
Die mit einem Stern markierte Teilaufgabe ist nicht obligatorisch.
Arbeitszeit: 60 Minuten.

**Aufgabe 1**

Sei $V_4 = C_2 \times C_2$ die Kleinsche Vierergruppe.

a) Man beweise: $V_4$ besitzt keine treue irreduzible Darstellung (über dem Körper $\mathbb{C}$).

b) Man gebe eine treue Darstellung von $V_4$ von möglichst kleinem Grad an.

**Aufgabe 2** Sei

$$Q_{20} = \mathrm{gp}\langle x, y : x^{10} = 1, y^2 = x^5, yxy^{-1} = x^{-1}\rangle$$

die verallgemeinerte Quaternionengruppe der Ordnung 20 und $\omega := e^{\pi i/5}$. Sei $0 \leq \ell < 10$.

a) Man zeige: Durch

$$\varrho_\ell(x) := \begin{pmatrix} \omega^\ell & 0 \\ 0 & \omega^{-\ell} \end{pmatrix}, \qquad \varrho_\ell(y) := \begin{pmatrix} 0 & (-1)^\ell \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

wird eine Darstellung $\varrho_\ell : Q_{20} \to GL(2, \mathbb{C})$ definiert.

b) Welche dieser Darstellungen sind irreduzibel, welche sind zueinander äquivalent?

c)* Man gebe sämtliche irreduziblen Darstellungen von $Q_{20}$ an.

**Aufgabe 3**

Sei $G$ eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung 12.

Man beweise mittels Darstellungstheorie:
Die Kommutatorgruppe $G' = [G, G]$ hat entweder Index 3 oder Index 4 in $G$.