Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

WS 2006/07
17. Jan. 2007

Darstellungen endlicher Gruppen
Übungsblatt 6

Für dieses Aufgabenblatt seien alle Darstellungen über dem Körper $\mathbb{C}$.

Aufgabe 21
Sei A_4 die alternierende Gruppe aller geraden Permutationen der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$.
a) Für die Kommutatorgruppe von A_4 beweise man

$$A_4' = [A_4, A_4] = \{(1), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\} \cong C_2 \times C_2$$

und $A_4/A_4' \cong C_3$.
b) Man zeige: Die natürliche Permutations-Darstellung von A_4 vom Grad 4 ist direkte Summe einer Darstellung vom Grad 1 und einer Darstellung vom Grad 3.
c) Man bestimme alle irreduziblen Darstellungen von A_4.

Aufgabe 22
Sei $Q_{12} = \mathrm{gp}\langle x, y : x^6 = 1,\ y^2 = x^3,\ yxy^{-1} = x^{-1}\rangle$ die verallgemeinerte Quaternionengruppe der Ordnung 12, vgl. Aufgabe 3.
a) Man zeige $Q_{12}' = \langle x^2 \rangle$ und $Q_{12}/Q_{12}' \cong C_4$.
b) Man bestimme alle irreduziblen Darstellungen von Q_{12}.

Aufgabe 23
Sei E die wie folgt durch Erzeugende und Relationen definierte Gruppe

$$E := \mathrm{gp}\langle x, y, s : x^3 = y^3 = s^2 = 1,\ xy = yx,\ sx = x^{-1}s,\ sy = y^{-1}s\rangle$$

a) Man zeige: E hat 18 Elemente und jedes $g \in E$ lässt sich eindeutig schreiben als

$$g = x^\nu y^\mu s^\lambda, \quad \nu, \mu \in \{0, 1, 2\}, \lambda \in \{0, 1\}.$$

b) Man beweise: $G := \langle x, y \rangle \subset E$ ist eine zu $C_3 \times C_3$ isomorphe Untergruppe. Es gibt genau vier Untergruppen $H \subset G$ der Ordnung 3. Jede solche Untergruppe ist ein Normalteiler von E mit $E/H \cong D_6$.
c) Man bestimme das Zentrum von E.

Aufgabe 24
a) Man bestimme alle irreduziblen Darstellungen der Gruppe E aus Aufgabe 23.
b) Man zeige: E hat keine treue irreduzible Darstellung.
c) Man gebe eine treue Darstellung von E von möglichst kleinem Grad an.

Abgabetermin: Mittwoch, 24. Januar 2007, 14 Uhr, Übungskasten im 1. Stock