Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

WS 2006/07
6. Dez. 2006

Darstellungen endlicher Gruppen

Übungsblatt 4

Aufgabe 13

Die unendliche Diedergruppe sei definiert durch

$$D_\infty := \mathrm{gp}\langle s, t : s^2 = 1,\ sts^{-1} = t^{-1}\rangle.$$

a) Man zeige, dass durch

$$\varrho(s) := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \varrho(t) := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eine treue Darstellung $\varrho : D_\infty \to GL(2,\mathbb{C})$ definiert wird, die reduzibel, aber nicht vollreduzibel ist.

b) Man zeige: Für jede ganze Zahl $k > 0$ ist die durch t^k erzeugte Untergruppe $N_k \subset D_\infty$ isomorph zu $(\mathbb{Z}, +)$ und ein Normalteiler von D_∞. Der Quotient D_∞/N_k ist isomorph zur Diedergruppe D_{2k}.

Aufgabe 14

Sei V der 5-dimensionale $\mathbb{C}$-Vektorraum aller komplexen symmetrischen 3×3-Matrizen mit Spur 0 und $\varrho : SO(3) \to GL(V)$ die durch

$$\varrho(A)X := AXA^\top \qquad \text{für } A \in SO(3) \text{ und } X \in V$$

definierte Darstellung (vgl. Aufg. 12). Dadurch wird auch eine Darstellung der abelschen Untergruppe

$$SO(2) \cong \left\{ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \varphi \in \mathbb{R} \right\} \subset SO(3)$$

induziert. Man zerlege diese Darstellung in ihre irreduziblen Komponenten.

Aufgabe 15

a) Die Gruppenalgebra $\mathbb{R}[C_2]$ und der Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ sind beide $\mathbb{R}$-Algebren vom Rang 2. Man zeige, dass sie nicht isomorph sind.

b) Man gebe alle $\mathbb{R}$-Algebren-Homomorphismen $\phi : \mathbb{R}[C_2] \to \mathbb{C}$ an.

---

b.w.

Aufgabe 16

Sei $g \in C_3$ ein erzeugendes Element der zyklischen Gruppe der Ordnung 3. Weiter sei $\omega := e^{2\pi i/3} \in \mathbb{C}$.

In der Gruppenalgebra $R := \mathbb{C}[C_3]$ betrachte man die Elemente

$$\begin{aligned} e_1 &:= \tfrac{1}{3}(1 + g + g^2), \\ e_2 &:= \tfrac{1}{3}(1 + \omega g + \omega^2 g^2), \\ e_3 &:= \tfrac{1}{3}(1 + \omega^2 g + \omega g^2). \end{aligned}$$

a) Man zeige: Das Hauptideal $I_\nu := Re_\nu \subset R$ ist ein 1-dimensionaler $\mathbb{C}$-Untervektorraum von R und es gilt $R = I_1 \oplus I_2 \oplus I_3$.

b) Man beweise die Formeln

i) $e_1 + e_2 + e_3 = 1$,

ii) $e_\nu^2 = e_\nu$ für $\nu = 1, 2, 3$,

iii) $e_\nu e_\mu = 0$ für $\nu \neq \mu$.

Abgabetermin: Mittwoch, 13. Dezember 2006, 14 Uhr, Übungskasten im 1. Stock