Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

WS 2006/07
17. Dez. 2006

Darstellungen endlicher Gruppen

Übungsblatt 3

Lösung der Aufgaben 11 und 12

Aufgabe 11

Der reelle Vektorraum der anti-hermiteschen komplexen 2×2-Matrizen mit Spur 0

$$R_3 := \left\{ \begin{pmatrix} ix_1 & -x_2 + ix_3 \\ x_2 + ix_3 & -ix_1 \end{pmatrix} : (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

werde mit dem $\mathbb{R}^3$ mit der euklidischen Norm identifiziert.

a) Man zeige: Für $X \in R_3$ und $A \in SU(2)$ liegt AXA^{-1} wieder in R_3. Dadurch wird eine Darstellung

$$\varrho : SU(2) \longrightarrow GL(R_3), \qquad \varrho(A)X := AXA^{-1},$$

induziert.

b) Man beweise: $\mathrm{Ker}\varrho = \{\pm E\}$ und $\mathrm{Im}(\varrho) = SO(3)$.

Lösung.

a) Für eine unitäre Matrix $A \in SU(2)$ gilt $A^{-1} = \bar{A}^\top$. Also ist

$$\overline{\varrho(A)X}^\top = (\overline{AX\bar{A}^\top})^\top = (\bar{A}\bar{X}A^\top)^\top = A\bar{X}^\top\bar{A}^\top = -AX\bar{A}^\top = -\varrho(A)X,$$

d.h. $\varrho(A)X \in R_3$.

Es ist klar, dass $\varrho(A)$ linear auf R_3 wirkt und dass $\varrho(AB) = \varrho(A)\varrho(B)$.

b) i) Wir bestimmen zunächst den Kern von ϱ. Sei also $\varrho(A) = \mathrm{id}$ für ein $A \in SU(2)$. Die Matrix A hat die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{C},\ |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

Es gilt $\varrho(A)X = X$ für alle $X \in R_3$. Wir setzen jetzt für X spezielle Vektoren ein, zunächst $X_1 := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$. Es ist

$$\begin{aligned} \varrho(A)X_1 = AX_1A^{-1} &= \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ -b & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\bar{a} & i\bar{b} \\ ib & -ia \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i(|a|^2 - |b|^2) & 2ia\bar{b} \\ 2i\bar{a}b & -i(|a|^2 - |b|^2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit dies gleich $X_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ ist, muss $|a|^2 - |b|^2 = 1$ sein. Da aber $|a|^2 + |b|^2 = 1$ ist, folgt $b = 0$ und $|a| = 1$, d.h. $a = e^{i\varphi}$ mit $\varphi \in \mathbb{R}$.

Jetzt wenden wir $\varrho(A)$ auf den Vektor $X_2 := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ an.

$$\varrho(A)X_2 = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -e^{2i\varphi} \\ e^{-2i\varphi} & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Bedingung $\varrho(A)X_2 = X_2$ liefert also $e^{2i\varphi} = e^{-2i\varphi} = 1$, d.h. $e^{i\varphi} = \pm 1$. Daraus folgt $A = \pm E$.

Umgekehrt ist klar, dass $\pm E \in \operatorname{Ker}\varrho$. Damit haben wir die Behauptung $\operatorname{Ker}\varrho = \{\pm E\}$ bewiesen.

ii) Nun zur Bestimmung des Bildes von ϱ. Wir bemerken zunächst, dass

$$\det \begin{pmatrix} ix_1 & -x_2 + ix_3 \\ x_2 + ix_3 & -ix_1 \end{pmatrix} = x_1^2 + (x_2 - ix_3)(x_2 + ix_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

die Determinante eines Elements aus R_3 ist also gleich dem Quadrat der euklidischen Norm. Es folgt

$$\|\varrho(A)X\|^2 = \det(AXA^{-1}) = \det X = \|X\|^2,$$

die Abbildung $\varrho(A)$ ist also längentreu, d.h. $\varrho(SU(2)) \subset O(3)$.

Da $SU(2)$ zusammenhängend ist (denn $SU(2)$ ist homöomorph zur Menge aller Vektoren vom Betrag 1 in $\mathbb{C}^2$, d.h. zur 3-Sphäre $\mathbb{S}^3$), und die Abbildung ϱ offensichtlich stetig ist, ist $\varrho(SU(2))$ ebenfalls zusammenhängend, also in der Zusammenhangskomponente der Eins von $O(3)$ enthalten, d.h. $\varrho(SU(2)) \subset SO(3)$.

Um zu zeigen, dass jedes Element von $SO(3)$ im Bild vorkommt, benutzen wir die folgende Tatsache.

Satz. *Sei $G_1 \subset SO(3)$ die Untergruppe aller Drehungen um die x_1-Achse,*

$$G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} : \varphi \in \mathbb{R} \right\},$$

und $G_2 \subset SO(3)$ die analog definierte Untergruppe aller Drehungen um die x_2-Achse. Dann lässt sich jede Matrix $A \in SO(3)$ schreiben als

$$A = B_1 C B_2 \qquad \text{mit } B_1, B_2 \in G_1,\ C \in G_2$$

Bemerkung. Natürlich gilt eine analoge Aussage, wenn man die x_1- und x_2-Achse durch irgend ein Paar aufeinander senkrecht stehender Achsen ersetzt.

Beweis des Satzes. Sei e_1, e_2, e_3 die kanonische Basis von $\mathbb{R}^3$ und seien

$$a_\nu := A^{-1} e_\nu, \quad \nu = 1, 2, 3.$$

(a_1, a_2, a_3) ist eine (positiv orientierte) Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$. Durch eine Drehung $B_2 \in G_1$ um die x_1-Achse kann man erreichen, das $a_1' := B_2 a_1$ in der x_1-x_3-Ebene liegt. Der Vektor a_1' hat die Länge 1, also gibt es eine Drehung $C \in G_2$ um die x_2-Achse, so dass $e_1 = Ca_1' = CB_2 a_1$. Die Vektoren $a_\nu'' := CB_2 a_\nu$, $\nu = 2, 3$, stehen senkrecht auf e_1, d.h. liegen in der x_2-x_3-Ebene. Es gibt daher eine Drehung $B_1 \in G_1$ um die x_1-Achse mit $e_\nu = B_1 a_\nu''$, $\nu = 2, 3$. Der Vektor e_1 ist unter B_1 invariant. Es folgt

$$e_\nu = B_1 C B_2 a_\nu \qquad \text{für } \nu = 1, 2, 3.$$

Da A die eindeutig bestimmte Transformation ist, die die Basis (a_1, a_2, a_3) in (e_1, e_2, e_3) überführt, folgt $A = B_1 C B_2$, q.e.d.

Aufgrund des Satzes genügt es zu zeigen, dass die Untergruppen G_1 und G_2 im Bild von ϱ liegen.

Beh. 1: Die Untergruppe G_1 ist Bild der Untergruppe

$$H_1 := \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} : \varphi \in \mathbb{R} \right\} \subset SU(2).$$

Beweis. Die x_1-Achse in R_3 wird von dem Vektor $X_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ aufgespannt.

Sei $A = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \in H_1$. Es gilt

$$\varrho(A) X_1 = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = X_1,$$

die x_1-Achse wird also elementweise festgelassen, d.h. $\varrho(A)$ ist eine Drehung um die x_1-Achse. Um den Drehwinkel zu bestimmen, wenden wir $\varrho(A)$ auf einen Vektor, der orthogonal zur Achse ist, an. Ein solcher Vektor ist $X_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in R_3$. Wir haben bereits in Teil a) gezeigt, dass

$$\varrho(A) X_2 = \begin{pmatrix} 0 & -e^{2i\varphi} \\ e^{-2i\varphi} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -x_2' + i x_3' \\ x_2' + i x_3' & 0 \end{pmatrix}$$

mit $(x_2', x_3') = (\cos 2\varphi, -\sin 2\varphi)$. Dies zeigt, dass $\varrho(A)$ eine Drehung um die x_1-Achse um den Winkel -2φ ist. Alle Drehungen um die x_1-Achse kommen also im Bild von H_1 vor.

Beh. 2: Die Untergruppe G_2 ist Bild der Untergruppe

$$H_2 := \left\{ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} : \varphi \in \mathbb{R} \right\} \subset SU(2).$$

Beweis. Dies wird ganz analog zur Beh. 1 bewiesen. Die x_2-Achse in R_3 wird durch den Vektor $X_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ aufgespannt. Für $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ gilt

$$\varrho(A) X_2 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = X_2,$$

also bleibt die x_2-Achse elementweise fest, d.h. $\varrho(A) \in G_2$. Anwendung von $\varrho(A)$ auf den zur x_2-Achse senkrechten Vektor X_1 ergibt

$$
\begin{aligned}
\varrho(A)X_1 &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \\
&= i \begin{pmatrix} \cos^2\varphi - \sin^2\varphi & 2\cos\varphi\sin\varphi \\ 2\cos\varphi\sin\varphi & \sin^2\varphi - \cos^2\varphi \end{pmatrix} \\
&= i \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ix_1' & ix_3' \\ ix_3' & -ix_1' \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

mit $(x_1', x_3') = (\cos 2\varphi, \sin 2\varphi)$, also ist $\varrho(A)$ eine Drehung um die x_2-Achse um den Winkel 2φ, also $\varrho(H_2) = G_2$, q.e.d.

Bemerkung. Aufgabe 11 bedeutet, dass es einen stetigen, surjektiven Gruppen-Homomorphismus

$$\varrho : SU(2) \longrightarrow SO(3)$$

gibt, der eine zweiblättrige Überlagerung darstellt. Da $SU(2)$ homöomorph zu $\mathbb{S}^3$, also einfach zusammenhängend ist, ist $SU(2)$ zur Spingruppe $Spin(3)$ isomorph.

Aufgabe 12

Sei $V := M(3 \times 3, \mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller reellen 3×3-Matrizen. Sei $W_1 \subset V$ der Teilraum aller skalaren Vielfachen der Einheitsmatrix, $W_2 \subset V$ der Teilraum der antisymmetrischen Matrizen ($A^\top = -A$) und $W_3 \subset V$ der Teilraum der symmetrischen Matrizen mit Spur 0.

a) Man bestimme die Dimensionen der W_ν und zeige: $V = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$.

b) Eine Darstellung $\varrho : SO(3) \to GL(V)$ werde definiert durch

$$\varrho(A)X := AXA^\top \qquad \text{für } A \in SO(3),\ X \in V.$$

Man zeige, dass die Teilräume W_1, W_2, W_3 bei dieser Darstellung invariant sind.

c) Man beweise: Die induzierte Darstellung $\varrho_{W_2} : SO(3) \to GL(W_2)$ ist äquivalent zur "tautologischen" Darstellung

$$SO(3) \xrightarrow{\text{id}} SO(3) \hookrightarrow GL(3, \mathbb{R}).$$

Lösung. Da die Teilaufgaben a) und b) einfach sind, führen wir nur Teil c) aus.

c) Wir identifizieren den Vektorraum W_2 der anti-symmetrischen 3×3-Matrizen mit dem $\mathbb{R}^3$ vermöge der Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \to W_2, \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & x_3 & -x_2 \\ -x_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & -x_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die kanonische Basis von $\mathbb{R}^3$ geht dabei über in die Matrizen

$$B_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Sei nun $A \in SO(3)$. Wir wollen die Wirkung von $\varrho(A)$ auf diese Basisvektoren berechnen. Wir bezeichnen die Koeffizienten von A wie folgt:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Da die Spalten a, b, c von $A \in SO(3)$ eine positiv orientierte Orthonormal-Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden, ist a das Vektorprodukt von b und c, d.h.

$$a = b \times c = \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix}$$

und analog $b = c \times a$, $c = a \times b$. (Die Formeln hierfür entstehen aus der obigen durch zyklische Vertauschung $a \to b \to c \to a$.) Nun ist

$$\begin{aligned}
\varrho(A)B_1 = AB_1A^\top &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -c_1 & b_1 \\ 0 & -c_2 & b_2 \\ 0 & -c_3 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & b_1c_2 - b_2c_1 & b_1c_3 - c_1b_3 \\ b_2c_1 - b_1c_2 & 0 & b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 & b_3c_2 - b_2c_3 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

also

$$\varrho(A)B_1 = a_1B_1 + a_2B_2 + a_3B_3.$$

Analog erhält man

$$\begin{aligned}
\varrho(A)B_2 &= b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3, \\
\varrho(A)B_3 &= c_1B_1 + c_2B_2 + c_3B_3.
\end{aligned}$$

Dies kann man entweder direkt nachrechnen oder auf folgende elegantere Art beweisen: Wir betrachten die Permutations-Matrix

$$P := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in SO(3).$$

Es ist $PB_1P^\top = B_2$, also

$$\varrho(A)B_2 = APB_1P^\top A^\top = \varrho(AP)B_1$$

Da

$$AP = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{pmatrix},$$

ergibt sich aus der Formel $\varrho(A)B_1 = \sum a_\nu B_\nu$ nun

$$\varrho(A)B_2 = \varrho(AP)B_1 = b_1B_1 + b_2B_2 + b_2B_3.$$

Nochmalige Anwendung der Permutationsmatrix ergibt

$$\varrho(A)B_3 = \varrho(AP^2)B_1 = c_1B_1 + c_2B_2 + c_3B_3.$$

Daher ist die Matrix-Darstellung von $\varrho(A)$ bezüglich der Basis $\mathcal{B} = (B_1, B_2, B_3)$

$$\varrho(A)_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = A.$$

Das bedeutet, dass die Darstellung ϱ äquivalent zur tautologischen Darstellung ist, q.e.d.
