Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

WS 2006/07
22. Nov. 2006

Darstellungen endlicher Gruppen

Übungsblatt 3

Aufgabe 9

Sei $G := C_2 \times C_4 \times C_8$.

a) Wieviele Darstellungen $\varrho : G \to \mathbb{C}^*$ mit $\varrho(x)^2 = 1$ für alle $x \in G$ gibt es?

b) Man beweise: Es gibt keine Darstellung $\varrho : G \to \mathbb{C}^*$, so dass $\varrho(x) = -1$ für alle $x \in G$ der Ordnung 2.

c) Man zeige: Es gibt eine treue Darstellung $\varrho : G \to GL(n, \mathbb{C})$ vom Grad $n = 3$, aber keine vom Grad $n = 2$.

Aufgabe 10

Sei $\phi : \mathbb{H} \to M(2 \times 2, \mathbb{C})$ die wie folgt definierte Abbildung der Quaternionen in den Ring der komplexen 2×2-Matrizen:

$$\phi(x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3) := \begin{pmatrix} x_0 + ix_1 & -x_2 + ix_3 \\ x_2 + ix_3 & x_0 - ix_1 \end{pmatrix}.$$

a) Man zeige: ϕ bildet den Schiefkörper $\mathbb{H}$ isomorph auf einen Unterring von $M(2 \times 2, \mathbb{C})$ ab.

b) Die multiplikative Gruppe $Sp(1)$ der Quaternionen mit Norm 1,

$$\|x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3\| := (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} = 1,$$

wird durch ϕ isomorph auf die Gruppe $SU(2)$ abgebildet.

Aufgabe 11

Der reelle Vektorraum der anti-hermiteschen komplexen 2×2-Matrizen mit Spur 0

$$R_3 := \left\{ \begin{pmatrix} ix_1 & -x_2 + ix_3 \\ x_2 + ix_3 & -ix_1 \end{pmatrix} : (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

werde mit dem $\mathbb{R}^3$ mit der euklidischen Norm identifiziert.

a) Man zeige: Für $X \in R_3$ und $A \in SU(2)$ liegt AXA^{-1} wieder in R_3. Dadurch wird eine Darstellung

$$\varrho : SU(2) \longrightarrow GL(R_3), \qquad \varrho(A)X := AXA^{-1},$$

induziert.

b) Man beweise: $\mathrm{Ker}\varrho = \{\pm E\}$ und $\mathrm{Im}(\varrho) = SO(3)$.

---

b.w.

Aufgabe 12

Sei $V := M(3 \times 3, \mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller reellen 3×3-Matrizen. Sei $W_1 \subset V$ der Teilraum aller skalaren Vielfachen der Einheitsmatrix, $W_2 \subset V$ der Teilraum der antisymmetrischen Matrizen ($A^\top = -A$) und $W_3 \subset V$ der Teilraum der symmetrischen Matrizen mit Spur 0.

a) Man bestimme die Dimensionen der W_ν und zeige: $V = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$.

b) Eine Darstellung $\varrho : SO(3) \to GL(V)$ werde definiert durch

$$\varrho(A)X := AXA^\top \qquad \text{für } A \in SO(3),\ X \in V.$$

Man zeige, dass die Teilräume W_1, W_2, W_3 bei dieser Darstellung invariant sind.

c) Man beweise: Die induzierte Darstellung $\varrho_{W_2} : SO(3) \to GL(W_2)$ ist äquivalent zur "tautologischen" Darstellung

$$SO(3) \xrightarrow{\text{id}} SO(3) \hookrightarrow GL(3, \mathbb{R}).$$

Abgabetermin: Mittwoch, 29. November 2006, 14 Uhr, Übungskasten im 1. Stock