Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

WS 2006/07
24. Nov. 2006

Darstellungen endlicher Gruppen
Übungsblatt 2

Aufgabe 5

Sei C_3 die zyklische Gruppe der Ordnung 3 und $g \in C_3$ ein erzeugendes Element. Seien $\varrho_1, \varrho_2 : C_3 \to GL(2, \mathbb{R})$ die beiden Darstellungen mit

$$\varrho_1(g) := \begin{pmatrix} \cos 2\pi/3 & -\sin 2\pi/3 \\ \sin 2\pi/3 & \cos 2\pi/3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \varrho_2(g) := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Man zeige, dass die obige Definition von $\varrho_2(g)$ tatsächlich zu einer Darstellung von C_3 gehört.

b) Man beweise, dass die Darstellungen ϱ_1 und ϱ_2 über dem Körper $\mathbb{R}$ äquivalent sind.

Aufgabe 6

Sei $\varrho : G \to GL(2, \mathbb{C})$ eine Darstellung einer endlichen Gruppe G. Es gebe zwei Gruppenelemente $x, y \in G$, so dass die Matrizen $\varrho(x)$ und $\varrho(y)$ nicht vertauschbar sind. Man zeige: Die Darstellung ϱ ist irreduzibel.

Aufgabe 7

Die Diedergruppe D_8 ist bekanntlich die Gruppe der Symmetrien eines Quadrats und besitzt deshalb eine natürliche Permutations-Darstellung vom Grad 4 (über dem Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). Man zerlege diese Darstellung in ihre irreduziblen Komponenten.

Aufgabe 8

Sei $\varrho : G \to GL(n, K)$ eine Darstellung einer Gruppe G. Für $x \in G$ werde definiert

$$\check{\varrho}(x) := \varrho(x^{-1})^\top.$$

Dabei bedeute $A^\top$ die zu A transponierte Matrix.

a) Man zeige, dass $\check{\varrho} : G \to GL(n, K)$ wieder eine Darstellung ist (die zu ϱ *kontragrediente* Darstellung).

b) Man gebe für $K = \mathbb{C}$ Beispiele zweier treuer Darstellungen τ, ϱ einer endlichen Gruppe G an, so dass τ äquivalent zu $\check{\tau}$, aber ϱ nicht äquivalent zu $\check{\varrho}$ ist.
