MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
PROF. DR. O. FORSTER

WS 2006/07
25. Okt. 2006

Darstellungen endlicher Gruppen

Übungsblatt 1

Aufgabe 1

Die *Kommutatorgruppe* G' einer Gruppe G ist definiert als die kleinste Untergruppe von G, die alle *Kommutatoren*

$$[x, y] := xyx^{-1}y^{-1}, \qquad x, y \in G,$$

enthält.

a) Man zeige: G' ist ein Normalteiler von G.

b) Man berechne die Kommutator-Untergruppe der Diedergruppe D_{2n}.
Hinweis: Man unterscheide die Fälle n gerade und n ungerade.

Aufgabe 2

Ein *linearer Charakter* einer Gruppe G ist eine Darstellung vom Grad eins

$$\chi : G \longrightarrow K^* = GL(1, K).$$

a) Man zeige: Der Kern jedes linearen Charakters χ von G umfasst die Kommutatorgruppe: $\mathrm{Ker}(\chi) \supset G'$.

b) Man bestimme alle linearen Charaktere der Diedergruppe D_{2n}.

c) Man beweise: Ist $\varrho : G \to GL(n, K)$ eine Darstellung und χ ein linearer Charakter von G, so ist auch

$$\chi\varrho : G \longrightarrow GL(n, K), \qquad x \mapsto \chi(x)\varrho(x),$$

eine Darstellung von G.

Aufgabe 3

Für eine ganze Zahl $m \geqslant 2$ ist die *verallgemeinerte Quaternionengruppe* Q_{4m} wie folgt durch Erzeugende und Relationen definiert:

$$Q_{4m} = \mathrm{gp}\langle x, y : x^{2m} = 1,\ y^2 = x^m,\ yxy^{-1} = x^{-1}\rangle$$

(Für $m = 2$ erhält man die übliche Quaternionengruppe Q_8).

a) Man zeige: Q_{4m} ist isomorph zu einer Untergruppe der Ordnung $4m$ der Gruppe $\mathbb{H}^*$ der invertierbaren Quaternionen.

b) Q_{4m} ist nicht isomorph zur Diedergruppe D_{4m}.

---

b.w.

Aufgabe 4

Sei Q_{4m} wie in Aufgabe 3.

a) Man bestimme alle linearen Charaktere $Q_{4m} \to \mathbb{C}^*$.

b) Man zeige: Sei $\omega := e^{\pi i/m} \in \mathbb{C}^*$ und $\ell \in \mathbb{Z}$. Dann gibt eine Darstellung

$$\varrho_\ell : Q_{4m} \to GL(2, \mathbb{C})$$

mit

$$\varrho_\ell(x) = \begin{pmatrix} \omega^\ell & 0 \\ 0 & \omega^{-\ell} \end{pmatrix}, \qquad \varrho_\ell(y) = \begin{pmatrix} 0 & \omega^{m\ell} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für welche ℓ ist ϱ_ℓ treu?

Abgabetermin: Mittwoch, 8. November 2006, 14 Uhr, Übungskasten im 1. Stock