MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
PROF. DR. O. FORSTER

SS 2006
5. Juli 2006

Endliche Körper, Übungsblatt 6

Aufgabe 21

a) Man beweise: Das Produkt aller normierten irreduziblen quadratischen Polynome über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_q$ ist gleich

$$Q(X) := \sum_{j=0}^{q} X^{j(q-1)} \in \mathbb{F}_q[X].$$

b) Man stelle eine analoge Formel für das Produkt aller normierten irreduziblen Polynome vom Grad 3 auf.

Aufgabe 22

a) Man zerlege das Polynom $X^{16} - X$ über dem Körper $\mathbb{F}_2$ in irreduzible Faktoren.

b) Man zerlege das Polynom $X^{16} - X$ über dem Körper $\mathbb{F}_4$ in irreduzible Faktoren. Dabei benutze man die Darstellung $\mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_2[\xi]$ mit $\xi^2 = \xi + 1$.

Aufgabe 23

a) Wie groß ist die Anzahl der normierten irreduziblen Polynome vom Grad d über dem Körper $\mathbb{F}_3$ für $d = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 100, 101$?

b) Man bestimme alle normierten irreduziblen quadratischen Polynome in $\mathbb{F}_3[X]$ sowie ein irreduzibles Polynom vom Grad 5.

c)* Man bestimme (mit Computerhilfe) ein irreduzibles Polynom $F(X) \in \mathbb{F}_3[X]$ vom Grad 101, und zwar von der Gestalt $F(X) = X^{101} + f(X)$, wobei $f(X)$ ein Polynom von möglichst kleinem Grad ist.

Aufgabe 24

Sei n eine positive ganze Zahl und K ein Körper, der eine primitive n-te Einheitswurzel ζ_n enthält. Man beweise folgende Formel für die Summe aller primitiven n-ten Einheitswurzeln in K.

$$\sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ \gcd(k,n)=1}} \zeta_n^k \;=\; \mu(n).$$

Dabei bezeichnet μ die Möbiussche μ-Funktion.

Abgabetermin: Mittwoch, 12. Juli 2006, 14 Uhr