Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

SS 2006
7. Juni 2006

Endliche Körper, Übungsblatt 4

Aufgabe 13

Sei K ein Körper und $F(X) \in K[X]$ ein Polynom mit $\gcd(F(X), F'(X)) = 1$.

a) Man zeige: Der Ring $R := K[X]/(F(X))$ ist isomorph zu einem kartesischen Produkt $K_1 \times K_2 \times \ldots \times K_r$ von Erweiterungskörpern $K_i \supset K$.

b) Man bestimme die Körper K_i für den Fall $K = \mathbb{F}_3$ und $F(X) = X^{10} - 1$.

Aufgabe 14

Sei p eine Primzahl. Man beweise: Das Polynom $F(X) = X^p - X - 1$ ist genau dann irreduzibel über dem Körper $\mathbb{F}_{p^n}$, wenn $p \nmid n$. Falls $p \mid n$, zerfällt $F(X)$ vollständig in Linearfaktoren.

Aufgabe 15

Sei $\zeta \in \mathbb{F}_{81} = \mathbb{F}_{3^4}$ eine primitive 5-te Einheitswurzel. Man zeige, dass $\zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4$ eine Basis von $\mathbb{F}_{81}$ über $\mathbb{F}_3$ ist, und bestimme eine dazu duale Basis, d.h. eine Basis $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ mit

$$\mathrm{Tr}(\zeta^i \xi_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j, \\ 0, & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

Dabei bezeichnet $\mathrm{Tr} : \mathbb{F}_{3^4} \to \mathbb{F}_3$ die Spur-Abbildung.

Aufgabe 16

Sei p eine ungerade Primzahl. Sei $\mathrm{N} : \mathbb{F}_{p^2}^* \to \mathbb{F}_p^*$ die Norm-Abbildung. Für $a \in \mathbb{F}_p^*$ sei

$$U_a := \{x \in \mathbb{F}_{p^2}^* : \mathrm{N}(x) = a\}.$$

a) Man zeige: Alle Mengen U_a bestehen aus $p + 1$ Elementen und sind Nebenklassen der Untergruppe $U_1 \subset \mathbb{F}_{p^2}^*$.

b) Der Durchschnitt $U_a \cap \mathbb{F}_p^*$ ist genau dann nicht-leer, wenn a ein Quadrat in $\mathbb{F}_p^*$ ist. In diesem Fall besteht der Durchschnitt aus 2 Elementen.

Abgabetermin: Mittwoch, 14. Juni 2006, 14 Uhr