

Einführung in die Zahlentheorie, Klausur

Aufgabe 1 Man zeige: Für alle ganzen Zahlen n gilt

$$42 \mid n^7 - n.$$

Aufgabe 2 Man bestimme alle Lösungen $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ der Gleichung

$$8x + 13y = 2.$$

Aufgabe 3 Man bestimme die Anzahl der erzeugenden Elemente folgender multiplikativer Gruppen:

$$(1) (\mathbb{Z}/169)^*, \quad (2) \mathbb{F}_{169}^*, \quad (3) \mathbb{F}_{211}^*.$$

Aufgabe 4 Seien p und q ungerade Primzahlen mit $p = 4q + 1$. Man beweise:

a) $\left(\frac{2}{p}\right) = -1$.

b) 2 ist Primitivwurzel modulo p .

Aufgabe 5 Sei p eine Primzahl ≥ 5 . Man betrachte die Kongruenz

$$3x^2 \equiv 2 \pmod{p}.$$

a) Man beweise: Die Lösbarkeit der Kongruenz hängt nur von $p \pmod{24}$ ab.

b) Man zeige, dass die Kongruenz für $p \equiv 19 \pmod{24}$ lösbar ist und bestimme alle Lösungen für $p = 19$.

c) Ist die Kongruenz für $p \equiv 17 \pmod{24}$ lösbar?