

## Einführung in die Zahlentheorie, Übungsblatt 12

**Aufgabe 45** Sei  $m \geq 3$  ungerade. Man leite den 2. Ergänzungssatz

$$\left(\frac{2}{m}\right) = (-1)^{(m^2-1)/8}$$

aus dem quadratischen Reziprozitätsgesetz und dem 1. Ergänzungssatz her.

*Hinweis.*  $\left(\frac{2}{m}\right) = \left(\frac{2-m}{m}\right) = \left(\frac{-1}{m}\right)\left(\frac{m-2}{m}\right).$

**Aufgabe 46** Seien  $m, k$  ungerade Zahlen  $\geq 3$  und  $a \in \mathbb{N}$  mit  $m \equiv \pm k \pmod{4a}$ . Man beweise die Gleichung

$$\left(\frac{a}{m}\right) = \left(\frac{a}{k}\right)$$

mithilfe des quadratischen Reziprozitätsgesetzes für das Jacobi-Symbol.

**Aufgabe 47** Da 2 kein Quadrat modulo 5 ist, hat man die Darstellung

$$\mathbb{F}_{25} \cong \mathbb{F}_5[\sqrt{2}].$$

Menge explizit ein erzeugendes Element der multiplikativen Gruppe  $\mathbb{F}_{25}^*$  in der Form

$$\xi = x_0 + x_1\sqrt{2}, \quad x_0, x_1 \in \mathbb{F}_5$$

an.

**Aufgabe 48** Sei  $p$  eine ungerade Primzahl und  $\xi$  ein erzeugendes Element der multiplikativen Gruppe  $\mathbb{F}_{p^2}^*$ . Man zeige:

- (1)  $N(\xi)$  ist erzeugendes Element von  $\mathbb{F}_p^*$ .
- (2)  $\sigma(\xi)/\xi$  ist erzeugendes Element der Gruppe

$$U_1 := \{x \in \mathbb{F}_{p^2}^* : N(x) = 1\}.$$

Gilt auch die Umkehrung?

---

Dieses Übungsblatt wird nicht korrigiert.

**Klausurtermin:** Mittwoch, 21. Juli 2004, 16 – 18 Uhr.