Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

SS 2004
28. Mai 2004

Einführung in die Zahlentheorie, Übungsblatt 6

Aufgabe 21 Man beweise für die Teileranzahl-Funktion τ

$$\sum_{d|n} \tau(d)^3 = \Big(\sum_{d|n} \tau(d)\Big)^2$$

Anleitung. Man behandle zuerst den Fall, dass n eine Primzahlpotenz ist und benutze die Formel $\sum_{k=1}^n k^3 = (\sum_{k=1}^n k)^2$.

Aufgabe 22 Man bestimme alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}_1$, die folgende Bedingungen erfüllen:

(1) $\varphi(2n) = \varphi(n)$,

(2) $\varphi(2n) = 2\varphi(n)$,

(3) $\varphi(2n) = n$,

(4) $\varphi(n) = 12$.

Aufgabe 23 Sei $p := 29$. Zu jedem Teiler $d \mid p-1$ bestimme man ein Element $x_d \in (\mathbb{Z}/p)^*$, das die Ordnung d hat.

Aufgabe 24 Sei $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ eine beliebige auf dem Intervall $[0,1]$ definierte Funktion. Damit werden zwei arithmetische Funktionen $\alpha, \tilde{\alpha} : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{C}$ wie folgt definiert:

$$\alpha(n) := \sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big), \qquad \tilde{\alpha}(n) := \sum_{\substack{k=1 \\ \gcd(k,n)=1}}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big).$$

(In der zweiten Summe wird nur über die zu n teilerfremden k summiert.)

Man beweise:

$$\tilde{\alpha}(n) = \sum_{d|n} \mu\Big(\frac{n}{d}\Big)\alpha(d).$$

Abgabe: Freitag, 4. Juni 2004, 11 Uhr, Übungskasten vor der Bibliothek

Um Kosten für Korrekturen zu sparen, bitte in Gruppen zu 2 oder 3 Teilnehmern bearbeiten und abgeben!