

## Einführung in die Zahlentheorie, Übungsblatt 4

**Aufgabe 13** Zeigen Sie:

- (1)  $8 \mid n^2 - 1$  für jede ungerade ganze Zahl  $n$ ,
- (2)  $24 \mid n^2 - 1$  für alle  $n \in \mathbb{Z}$  mit  $\gcd(n, 6) = 1$ ,
- (3)  $30 \mid n^5 - n$  für alle  $n \in \mathbb{Z}$ ,
- (4)  $504 \mid n^9 - n^3$  für alle  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Aufgabe 14**

Berechnen Sie die letzten drei Ziffern der Dezimaldarstellung von  $2^{10^6}$ .

**Aufgabe 15**

- a) Berechnen Sie den größten gemeinsamen Teiler  $F(X) \in \mathbb{Q}[X]$  der Polynome

$$P(X) := X^5 - 1, \quad Q(X) := X^3 - 1 \in \mathbb{Q}[X].$$

- b) Bestimmen Sie Polynome  $\varphi(X), \psi(X) \in \mathbb{Q}[X]$ , so dass

$$F(X) = \varphi(X)P(X) + \psi(X)Q(X).$$

**Aufgabe 16** Es sei  $\phi$  der Isomorphismus

$$\phi : \mathbb{Z}/221 \longrightarrow (\mathbb{Z}/13) \times (\mathbb{Z}/17), \quad x \mapsto (x \bmod 13, x \bmod 17).$$

Bestimmen Sie Elemente  $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{Z}/221$ , so dass gilt:

$$\phi(\xi_1) = (1, 0), \quad \phi(\xi_2) = (0, 1).$$

---

**Abgabe:** Freitag, 21. Mai 2004, 11 Uhr, Übungskasten vor der Bibliothek