

Elliptische Funktionen und Elliptische Kurven, Übungen Blatt 13

In den folgenden zwei Aufgaben betrachte man die zwei Erzeugenden

$$S := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

der Modulgruppe $\Gamma = SL(2, \mathbb{Z}) / \{\pm 1\}$.

Aufgabe 49

Finde alle Elemente

- a) aus Γ , die mit S kommutieren,
- b) aus $SL(2, \mathbb{Z})$, die mit S kommutieren.

Aufgabe 50

Finde

- a) alle Elemente aus Γ , die mit ST kommutieren,
- b) alle Elemente aus $SL(2, \mathbb{Z})$, die mit ST kommutieren,
- c) das kleinste $n > 0$ mit $(ST)^n = E$ in Γ .

Aufgabe 51

Auf $M(2 \times 2, \mathbb{Z})$ betrachte man folgende Äquivalenzrelation: Für $A, B \in M(2 \times 2, \mathbb{Z})$ sei

$$A \sim B \quad :\iff \quad \exists S_1, S_2 \in SL(2, \mathbb{Z}) \text{ mit } S_1 A S_2 = B$$

Man zeige: Ist $\gcd(u, v) = 1$, dann ist

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & uv \end{pmatrix}$$

Aufgabe 52

Man zeige: Zu jeder Matrix $A \in M(2 \times 2, \mathbb{Z})$ mit $\det(A) \neq 0$ gibt es ganze Zahlen m_1, m_2 mit

$$A \sim \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad m_1 \mid m_2.$$

Abgabetermin: Montag, 05.02.2001, 9:10 Uhr, Übungskasten vor HS 138.