MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Otto Forster

WS 2000/2001

Elliptische Funktionen und Elliptische Kurven, Übungen
Blatt 10

Es sei k stets ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Aufgabe 37

Es sei P_5 ein normiertes Polynom vom Grade 5 aus $k[X]$, $\mathrm{char}(k) \neq 2$, und $Y := \sqrt{P_5(X)}$. Zeigen Sie:
a) Es gibt genau eine diskrete normalisierte Bewertung $\mathcal{V}$ von $k(X)[\sqrt{P_5(X)}]$ über k derart, dass für $v := \mathcal{V}|k(X)^*$ gilt:

$$v\left(\frac{1}{X}\right) > 0$$

b) Man zeige, dass $\frac{X^2}{Y}$ eine Ortsuniformisierende für diese Bewertung ist.

Aufgabe 38

Sei $\mathrm{char}(k) \neq 2$ und $P_m(X) \in k[X]$ ein Polynom vom Grad $m \geq 4$, das paarweise verschiedene Nullstellen besitzt. Ferner sei $C \subset \mathbb{P}_2(k)$ die Kurve, deren affiner Teil durch die Gleichung $Y^2 = P_m(X)$ beschrieben wird.
Man zeige, dass
a) C im Affinen singularitätenfrei ist;
b) C die unendlichferne Gerade in genau einem Punkt schneidet. Dieser ist ein singulärer Punkt der Kurve.

Aufgabe 39

Man beweise für eine elliptische Kurve E über k:
a) Sei $g \in K(E)$, $\mathrm{char}(k) = 0$ und $dg = 0$. Dann ist g konstant.
b) Für den Fall $\mathrm{char}(k) = p \neq 0$ gebe man eine nicht konstante rationale Funktion $g \in K(E)$ mit $dg = 0$ an.

Aufgabe 40

Es sei E eine elliptische Kurve über k, $\mathrm{char}(k) \neq 2, 3$.
Sei $g \in K(E)$ mit $dg \neq 0$. Man zeige, dass die Differentialgleichung

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = dg$$

keine Lösung $\varphi \in K(E)$ besitzt.

Abgabetermin: Montag, 15.01.2001, 9:10 Uhr, Übungskasten vor HS 138.