MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Otto Forster

WS 2000/2001

Elliptische Funktionen und Elliptische Kurven, Übungen
Blatt 9

Aufgabe 33

Für einen algebraisch abgeschlossenen Körper k mit $\mathrm{char}(k) \neq 2, 3$ sei $E \subset \mathbb{P}_2(k)$ die elliptische Kurve mit der affinen Gleichung $Y^2 = P_3(X) := X^3 + aX + b,\ a, b \in k$.

Man zeige, daß die Kurve E genau 9 paarweise verschiedene Wendepunkte besitzt.

Aufgabe 34

Es seien K, k Körper, $k \subset K$ und $\Omega_k(K)$ der Differentialmodul von K über k. Man definiert die *logarithmische Ableitung* durch

$$dlog : K^* \longrightarrow \Omega_k(K), \quad f \mapsto dlog(f) := \frac{df}{f}.$$

Man zeige: $dlog$ ist ein Gruppenhomomorphismus der multiplikativen Gruppe K^* in die additive Gruppe $\Omega_k(K)$.

Aufgabe 35

Sei $K = K(E)$ der Funktionenkörper einer elliptischen Kurve $E \subset \mathbb{P}_2(k)$ und $f \in K^*$.

Man zeige: $\omega := dlog(f) = \frac{df}{f}$ (vgl. Aufgabe 34) hat höchstens Polstellen 1. Ordnung.

Genauer gilt: Ein Punkt $q \in E$ ist eine Polstelle 1. Ordnung von ω genau dann, wenn f in q eine Null- oder Polstelle hat, deren Ordnung kein Vielfaches von $\mathrm{char}(k)$ ist.

Aufgabe 36

Es sei E die elliptische Kurve mit der affinen Gleichung

$$Y^2 = P_3(X) := X(X-1)(X-2).$$

Man bestimme den Divisor der Differentialform dY.

Abgabetermin: Mittwoch, 10.01.2001, 9:10 Uhr, Übungskasten vor HS 138.

Frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr!