MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Otto Forster

WS 2000/2001

Elliptische Funktionen und Elliptische Kurven, Übungen
Blatt 8

Aufgabe 29

Sei $E \subset \mathbb{P}_2(k)$ die elliptische Kurve mit der affinen Gleichung $Y^2 = X^3 - 20X + 20$ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k mit $\mathrm{char}(k) \geq 7$ und

$$F := (X - Y^2)|E \in K(E).$$

Man bestimme die Null- und Polstellen von F (einschließlich Vielfachheiten).

Aufgabe 30

Sei $E \subset \mathbb{P}_2(k)$ die elliptische Kurve mit der affinen Gleichung

$$Y^2 = P_3(X) := X(X-1)(X-2)$$

über einem algebraisch abgeschlossenem Körper k mit $\mathrm{char}(k) \neq 2, 3$ und $f := (X - tY^2)|E \in K(E)$, wobei $t \in k$ eine Konstante ist. Man bestimme die Nullstellenordnung von f im Punkt $(0,0) \in E$ in Abhängigkeit von t.

Aufgabe 31

Es sei E die elliptische Kurve mit der affinen Gleichung $Y^2 = X^3 + X + 1$ über dem algebraischen Abschluss des Körpers $\mathbb{F}_5$ und

$$q_1 := (0,1),\ q_2 := (2,1),\ q_3 := (4,2) \in \mathbb{F}_5 \times \mathbb{F}_5.$$

Man zeige $q_1, q_2, q_3 \in E$ und bestimme zu dem Divisor $D := q_1 + q_2 - q_3$ einen Punkt $p \in E$, so dass D linear äquivalent zu p ist, d.h.

$$D \equiv p \bmod \mathrm{Div}_P(E).$$

Aufgabe 32

Sei k ein Körper, A eine k-Algebra, und seien $\nabla_1, \nabla_2 : A \longrightarrow A$ zwei k-Derivationen.

a) Man zeige, dass die *Lieklammer*

$$[\nabla_1, \nabla_2] := \nabla_1 \circ \nabla_2 - \nabla_2 \circ \nabla_1$$

eine k-Derivation ist.

b) Im folgenden sei $A = k[X]$ und es seien f, g Polynome aus A.

Für die Derivationen $\nabla_1 := f \cdot \dfrac{d}{dX}$ und $\nabla_2 := g \cdot \dfrac{d}{dX}$ berechne man die Lieklammer $[\nabla_1, \nabla_2]$.

Abgabetermin: Montag, 18.12.2000, 9:10 Uhr, Übungskasten vor HS 138.