

## Elliptische Funktionen und Elliptische Kurven, Übungen Blatt 6

### Aufgabe 21

Es sei  $PGL(n, K) := GL(n, K)/\sim$  die der Vorlesung definierte *Projektive Lineare Gruppe*. Man zeige für die Symmetrischen Gruppen  $S_3, S_4$  und die Alternierende Gruppe  $A_5$ :

- a)  $PGL(2, \mathbb{F}_2) = S_3$ .
- b)  $PGL(2, \mathbb{F}_3) = S_4$ .
- c\*)  $PGL(2, \mathbb{F}_4) = A_5$ .

### Aufgabe 22

Man zeige: Zu drei paarweise verschiedenen Punkten  $a, b, c \in \mathbb{P}_1(K)$  gibt es genau eine projektiv-lineare Abbildung  $\Phi := \Phi_{abc} : \mathbb{P}_1(K) \rightarrow \mathbb{P}_1(K)$  mit  $\Phi(a) = 0$ ,  $\Phi(b) = 1$  und  $\Phi(c) = \infty$ .

### Aufgabe 23

Mithilfe von Aufgabe 22 können wir nun definieren: Sind  $a, b, c, x \in \mathbb{P}_1(K)$  Punkte, von denen  $a, b, c$  paarweise verschieden sind, so wird das Doppelverhältnis  $DV$  durch  $DV(a, b, c, x) := \Phi_{abc}(x) \in \mathbb{P}_1(K) = K \cup \{\infty\}$  definiert. Zeigen Sie:

- a) Sind  $a, b, c, x \in K$ ,  $a, b, c$  paarweise verschieden, so gilt:

$$DV(a, b, c, x) = \left( \frac{x-c}{b-c} : \frac{x-a}{b-a} \right) \in \mathbb{P}_1(K)$$

- b) Sei  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$  ein Quadrupel paarweise verschiedener Punkte in  $\mathbb{P}_1(K)$  und  $(b_1, b_2, b_3, b_4)$  ein ebensolches Quadrupel in  $\mathbb{P}_1(K)$ . Es gibt genau dann eine projektiv-lineare Abbildung  $\Phi : \mathbb{P}_1(K) \rightarrow \mathbb{P}_1(K)$  mit  $\Phi(a_i) = b_i$  für  $i = 1, \dots, 4$ , wenn

$$DV(a_1, a_2, a_3, a_4) = DV(b_1, b_2, b_3, b_4).$$

### Aufgabe 24

Sei  $v : K^* \rightarrow \mathbb{Z}$  eine *diskrete Bewertung*. Für  $x \in K^*$  sei  $|x| := e^{-v(x)}$ , für  $x = 0$  setze man  $|0| := 0$ . Zeigen Sie:

- a) Die Abbildung  $|\cdot| : K \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto |x|$  ist ein *Absolutbetrag*, d.h. es gilt:

- (i)  $|x| \geq 0$  und  $|x| = 0 \iff x = 0$ ;
- (ii)  $|x + y| \leq |x| + |y|$ ;
- (iii)  $|xy| = |x||y|$ ;

- b) Verschärfend zu (ii) gilt sogar (ii')  $|x + y| \leq \max(|x|, |y|)$ .

Einen solchen Betrag nennt man einen *nichtarchimedischen Betrag*.

**Abgabetermin: Montag, 04.12.2000, 9:10 Uhr, Übungskasten vor HS 138.**

**Übungen: Mittwoch, 14 bis 16 Uhr, E 4.**