

Elliptische Funktionen und Elliptische Kurven, Übungen Blatt 6

Aufgabe 21

Es sei $PGL(n, K) := GL(n, K)/\sim$ die der Vorlesung definierte *Projektive Lineare Gruppe*. Man zeige für die Symmetrischen Gruppen S_3, S_4 und die Alternierende Gruppe A_5 :

- a) $PGL(2, \mathbb{F}_2) = S_3$.
- b) $PGL(2, \mathbb{F}_3) = S_4$.
- c*) $PGL(2, \mathbb{F}_4) = A_5$.

Aufgabe 22

Man zeige: Zu drei paarweise verschiedenen Punkten $a, b, c \in \mathbb{P}_1(K)$ gibt es genau eine projektiv-lineare Abbildung $\Phi := \Phi_{abc} : \mathbb{P}_1(K) \rightarrow \mathbb{P}_1(K)$ mit $\Phi(a) = 0$, $\Phi(b) = 1$ und $\Phi(c) = \infty$.

Aufgabe 23

Mithilfe von Aufgabe 22 können wir nun definieren: Sind $a, b, c, x \in \mathbb{P}_1(K)$ Punkte, von denen a, b, c paarweise verschieden sind, so wird das Doppelverhältnis DV durch $DV(a, b, c, x) := \Phi_{abc}(x) \in \mathbb{P}_1(K) = K \cup \{\infty\}$ definiert. Zeigen Sie:

- a) Sind $a, b, c, x \in K$, a, b, c paarweise verschieden, so gilt:

$$DV(a, b, c, x) = \left(\frac{x-c}{b-c} : \frac{x-a}{b-a} \right) \in \mathbb{P}_1(K)$$

- b) Sei (a_1, a_2, a_3, a_4) ein Quadrupel paarweise verschiedener Punkte in $\mathbb{P}_1(K)$ und (b_1, b_2, b_3, b_4) ein ebensolches Quadrupel in $\mathbb{P}_1(K)$. Es gibt genau dann eine projektiv-lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{P}_1(K) \rightarrow \mathbb{P}_1(K)$ mit $\Phi(a_i) = b_i$ für $i = 1, \dots, 4$, wenn

$$DV(a_1, a_2, a_3, a_4) = DV(b_1, b_2, b_3, b_4).$$

Aufgabe 24

Sei $v : K^* \rightarrow \mathbb{Z}$ eine *diskrete Bewertung*. Für $x \in K^*$ sei $|x| := e^{-v(x)}$, für $x = 0$ setze man $|0| := 0$. Zeigen Sie:

- a) Die Abbildung $|\cdot| : K \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ ist ein *Absolutbetrag*, d.h. es gilt:

- (i) $|x| \geq 0$ und $|x| = 0 \iff x = 0$;
- (ii) $|x + y| \leq |x| + |y|$;
- (iii) $|xy| = |x||y|$;

- b) Verschärfend zu (ii) gilt sogar (ii') $|x + y| \leq \max(|x|, |y|)$.

Einen solchen Betrag nennt man einen *nichtarchimedischen Betrag*.

Abgabetermin: Montag, 04.12.2000, 9:10 Uhr, Übungskasten vor HS 138.

Übungen: Mittwoch, 14 bis 16 Uhr, E 4.