MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Otto Forster

WS 2000/2001

Elliptische Funktionen und Elliptische Kurven, Übungen
Blatt 5

Sei K ein Körper.

Aufgabe 17

Seien die Punkte $a := (a_0 : a_1 : a_2)$, $b := (b_0 : b_1 : b_2)$, $c := (c_0 : c_1 : c_2) \in \mathbb{P}_2(K)$ gegeben. Zeigen Sie:

$$a, b, c \text{ liegen auf einer Geraden} \iff \det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{pmatrix} = 0$$

Aufgabe 18

Nun betrachten wir vier Punkte $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{P}_2(K)$, so dass keine 3 Punkte auf einer Geraden in $\mathbb{P}_2(K)$ liegen. Ebenso seien vier Punkte $b_1, b_2, b_3, b_4 \in \mathbb{P}_2(K)$ definiert. Man zeige: Es gibt genau eine projektiv-lineare Abbildung

$$\Phi : \mathbb{P}_2(K) \to \mathbb{P}_2(K) \text{ mit } \Phi(a_i) = b_i \text{ für } i = 1, ..., 4$$

Aufgabe 19

Sei $\mathrm{char}(K) \neq 2$ und $C \subset \mathbb{P}_2(K)$ der Kreis, dessen affine Gleichung lautet $X^2 + Y^2 = 1$. Sei $\Phi : \mathbb{P}_2(K) \to \mathbb{P}_2(K)$ die projektiv-lineare Abbildung mit

$$\begin{aligned} \Phi((1:0:1)) &= (0:0:1), \\ \Phi((0:1:0)) &= (0:1:0), \\ \Phi((1:0:-1)) &= (1:0:0), \\ \Phi((1:1:0)) &= (1:1:1). \end{aligned}$$

Gesucht ist die Gleichung der Bildkurve $\Phi(C)$.

Aufgabe 20

Die $\wp$-Funktion zu einem Gitter $\Lambda \subset \mathbb{C}$ genügt bekanntlich der Differentialgleichung

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3,$$

wobei g_2, g_3 von Λ abhängige Konstanten sind. Man beweise $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$.

Hinweis: Es genügt zu zeigen, dass das Polynom $P(X) := 4X^3 - g_2X - g_3 \in \mathbb{C}[X]$ keine mehrfache Nullstelle hat.

Abgabetermin: Montag, 27.11.2000, 9:10 Uhr, Übungskasten vor HS 138.

Übungen: Mittwoch, 14 bis 16 Uhr, E 4.