MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Otto Forster

WS 2000/2001

Elliptische Funktionen und Elliptische Kurven, Übungen
Blatt 4

Aufgabe13

Man betrachte die Funktion $\wp'(z)^2\wp(2z)$.

a) Man beweise, daß diese Funktion nur in den Gitterpunkten Polstellen hat. Von welcher Ordnung sind diese?

b) Man drücke diese Funktion durch $\wp(z)$ aus.

c) Man stelle $\wp(2z)$ als rationale Funktion von $\wp(z)$ dar und beweise die Formel:

$$\wp(2z) = -2\wp(z) + \frac{1}{4}\left(\frac{\wp''(z)}{\wp'(z)}\right)^2$$

Aufgabe 14

Man betrachte die sogenannte *Fermatkurve* $x_1^m + x_2^m = x_0^m$, $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$.

Man zeige, dass die Fermatkurve in $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ glatt ist und man bestimme ihre "unendlich fernen" Punkte auf der Geraden $\{x_0 = 0\}$.

Aufgabe 15

Sei $f \in K[X,Y]$,

$$f(X,Y) = \sum_{\nu,\mu=0}^{n} c_{\nu\mu} X^\nu Y^\mu \quad \text{mit } \deg f = m.$$

Definition: Ein homogenes Polynom $F(x_0, x_1, x_2) \in K[x_0, x_1, x_2]$ vom Grad m heißt *Homogenisierung* von f, falls $F(1, X, Y) = f(X,Y)$ (Gleichheit von Polynomen!)

Man zeige: Zu jedem $f \in K[X,Y]$ gibt es eine eindeutig bestimmte Homogenisierung.

Aufgabe 16

In $\mathbb{R}^2$ betrachten wir reelle Kreise $K = K_{a,b,r}$, d.h. die Nullstellen-Gebilde der Polynome

$$f(X,Y) := (X-a)^2 + (Y-b)^2 - r^2 \in \mathbb{R}[X,Y], \quad (r > 0).$$

Die Komplexifizierung von K erhält man, indem man $f(X,Y)$ als Element aus $\mathbb{C}[X,Y]$ auffasst. Nach Aufgabe 15 lässt sich $f(X,Y)$ eindeutig homogenisieren, und man erhält damit eine Kurve in $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$, die projektive Vervollständigung der Komplexifizierung von K.

Man zeige: Die projektive Vervollständigung eines jeden komplexifizierten Kreises schneidet die "unendlich ferne" Gerade in $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ in genau den Punkten $(0:1:i)$ und $(0:1:-i)$. Diese beiden Schnittpunkte hängen also nicht vom speziellen Kreis ab!

Abgabetermin: Montag, 20.11.2000, 9.10 Uhr in den Übungskasten vor HS 138.

Übungen: Mittwoch, 14 bis 16 Uhr, E 4.

Sprechstunde des Korrektors Klaus Linde, Zimmer 403: Mittwoch, 11 bis 12 Uhr