

Elliptische Funktionen und Elliptische Kurven, Übungen
Blatt 3

Aufgabe 9

Es sei Λ ein Gitter in \mathbb{C} , $E := \mathbb{C}/\Lambda$ und $n \geq 2$. Zu der Abbildung

$$\mu : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda, [z] \mapsto [nz]$$

betrachten wir die Menge $E[n] := \{[z] \in E : [nz] = [0]\}$, die Menge der sogenannten *n-Teilungspunkte* von Λ .

Man zeige:

- a) $E[n]$ bildet eine Untergruppe der Ordnung n^2 .
- b) $E[n] \cong (\mathbb{Z}/n) \times (\mathbb{Z}/n)$.

Aufgabe 10

Betrachten wir die in der Vorlesung behandelte Funktion \wp' . Man zeige:

$$\wp'(z) = 0 \iff z \text{ ist ein 2-Teilungspunkt } \neq 0.$$

Aufgabe 11

Zwei Gitter Λ und Λ' heißen *ähnlich*, wenn es ein $\alpha \in \mathbb{C}^*$ gibt mit $\Lambda' = \alpha\Lambda$.

Es seien die Gitter $\Lambda_\tau := \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ mit $\text{Im}(\tau) > 0$ und $\Lambda_{\tau'} := \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau'$ mit $\text{Im}(\tau') > 0$ gegeben.

Man zeige:

$$\Lambda_\tau \text{ ist ähnlich zu } \Lambda_{\tau'} \iff \exists \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \quad \text{mit } \tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

Aufgabe 12

Man beweise folgende Transformationsformel für die in der Vorlesung und in der Aufgabe 7 definierten Funktionen $G_k(\tau)$, $k \geq 2$:

$$G_k\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^{2k} G_k(\tau) \quad \text{für alle } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}).$$

Abgabetermin: Montag, 13.11.2000, 9.10 Uhr in den Übungskasten vor HS 138.
Übungen: Mittwoch, 14 bis 16 Uhr, E 4.