MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Otto Forster

WS 2000/2001

Elliptische Funktionen und Elliptische Kurven, Übungen
Blatt 2

Aufgabe 5

Es sei $\Lambda := \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ ein Gitter in $\mathbb{C}$ und

$$\zeta(z) := \frac{1}{z} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus 0} \Big(\frac{1}{z-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \Big)$$

die *Weierstraßsche ζ-Funktion*. Man zeige:
a) Die Reihe konvergiert auf $\mathbb{C}$ normal gegen eine meromorphe Funktion, die genau in den Gitterpunkten von Λ Polstellen erster Ordnung besitzt.
b) $\zeta' = -\wp$.
c) Ist die ζ-Funktion eine doppeltperiodische Funktion?

Aufgabe 6

Es seien das Gitter und die ζ-Funktion wie in Aufgabe 5 definiert. Man zeige:
a) Es gibt Konstanten η_1 und η_2, so daß $\zeta(z + \omega_j) = \zeta(z) + \eta_j$ für $j = 1, 2$ und alle $z \in \mathbb{C}$.
b) Für diese Konstanten gilt: $\eta_1\omega_1 - \eta_2\omega_2 = 2\pi i$.

Aufgabe 7

Es seien das Gitter $\Lambda_\tau := \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$, mit $\tau \in \mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C}; \Im(\tau) > 0\}$ und

$$G_k(\tau) := \sum_{n,m}{}' \frac{1}{(n + m\tau)^{2k}}, \quad k \geq 2,$$

wie in der Vorlesung definiert (d.h. summiert wird über alle m und n aus $\mathbb{Z}$, wobei der Summand $n = m = 0$ weggelassen wird).
Man zeige:
a) die Reihe $G_k(\tau)$ konvergiert gleichmäßig für $\delta > 0$ auf $\{\tau \in \mathbb{H} : \Im(\tau) \geq \delta\}$.
b) $G_k(\tau + 1) = G_k(\tau)$.

Aufgabe 8

Man drücke $\wp''$ und $\wp''''$ durch Polynome in $\wp$ aus.

Abgabetermin: Änderung! Montag, 6.11.2000, 9.00 Uhr in den Übungskasten vor HS 138.
Übungen: Mittwoch, 14 bis 16 Uhr, E 4.