MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Otto Forster

WS 2000/2001

Elliptische Funktionen und Elliptische Kurven, Übungen
Blatt 1

Aufgabe 1

Es sei $\Lambda \subset \mathbb{C}$ ein Gitter und $R_\Lambda := \{\alpha \in \mathbb{C} : \alpha\Lambda \subset \Lambda\}$.
Man zeige:
a) R_Λ ist ein kommutativer Ring mit Einselement.
b) Für die Gruppe R_Λ^* der Einheiten von R_Λ gilt: $R_\Lambda^* = \{\alpha \in \mathbb{C} : \alpha\Lambda = \Lambda\}$.
c) $R_\Lambda \cap \mathbb{R} = \mathbb{Z}$.

Aufgabe 2

Es seien zwei Gitter gegeben: $\Lambda_1 := \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ und $\Lambda_2 := \mathbb{Z} + \rho\mathbb{Z}$, wobei $\rho := e^{2\pi i/3}$ die dritte Einheitswurzel bezeichnet. Man berechne die Gruppe der Einheiten (siehe Aufgabe 1)

$$R_{\Lambda_1}^* \quad \text{und} \quad R_{\Lambda_2}^*.$$

Aufgabe 3

Man betrachte die holomorphe Abbildung

$$\Phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*, \quad z \mapsto e^{2\pi i z}$$

und zeige:
a) Φ ist surjektiv und lokal biholomorph.
b) Für alle holomorphen Abbildungen $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ ist $F := f \circ \Phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit der Periode 1.
c) Umgekehrt läßt sich jede holomorphe Funktion $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit Periode 1 zerlegen in $F = f \circ \Phi$, wobei $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ holomorph ist.

Aufgabe 4

Man zeige: Jede holomorphe Funktion $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit Periode 1 läßt sich schreiben als eine unendliche Reihe

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n z}, \quad c_n \in \mathbb{C},$$

die auf jedem kompakten Teil von $\mathbb{C}$ gleichmäßig konvergiert.

Hinweis: Man zerlege F in $f \circ \Phi$ und wende eine Laurententwicklung an.

Abgabetermin: Mittwoch, 25.10.2000, 9.00 Uhr in den Übungskasten vor HS 138.
Bei jeder Aufgabe können bis zu 4 Punkte erreicht werden.
Übungen: Mittwoch, 14 bis 16 Uhr, E 4.