Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

SS 1996

Blatt 11

Übungen zur Vorlesung: Der Minkowski-Raum

Aufgabe 41: **a.** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig bzgl. 0.
Zeige: Für eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) = f(0) + \sum_\nu f_\nu(x) x_\nu, \text{ mit } f_\nu(x) := \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(tx)dt,$$

für alle $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$.
b. Sei $\theta : \mathcal{C}_a^\infty \to \mathbb{R}$ eine Derivation im Punkt $a \in \mathbb{R}^n$. Beweise für alle $f \in \mathcal{C}_a^\infty$

$$\theta(f) = \sum_\nu c_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(a), \text{ mit } c_\nu := \theta(x_\nu).$$

(x_ν ist dabei die ν-te Koordinatenfunktion.)

Aufgabe 42: Die *Poincaré-Halbebene* ist definiert als die obere Halbebene $H = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : v > 0\}$ mit der Metrik $g = \frac{1}{v^2}(du \otimes du + dv \otimes dv)$.

a. Parametrisiere die folgenden beiden Kurven in H nach der Bogenlänge bzgl. der Metrik g:

$$\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t), t \in]0, \pi[, \quad \gamma_2 = (0, t), t \in \mathbb{R}_+^*.$$

b. Zeige: Für beliebige Konstanten $a \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}_+^*$ sind die folgenden Abbildungen $\tau_i : H \to H$ Isometrien von H:

$$\tau_1(u, v) = (u + a, v), \quad \tau_2(u, v) = (ru, rv),$$
$$\tau_3(u, v) = (-u, v), \quad \tau_4(u, v) = \frac{(u, v)}{u^2 + v^2}.$$

c. Zeige: Die Geodätischen von H sind die vertikalen Geraden $\{u = \mathit{const}\}$ und die Halbkreise $\{(u - a)^2 + v^2 = r^2\}$, $(a \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}_+^*)$.

b.w.

Aufgabe 43: Die *Schwarzschild-Halbebene* zur Masse $M > 0$ ist definiert als $P = \{(t, v) \in \mathbb{R}^2 : r > 2M\}$ mit der Metrik

$$g = (1 - \frac{2M}{r})dt \otimes dt - (1 - \frac{2M}{r})^{-1} dr \otimes dr.$$

Bestimme alle lichtartigen Geodätischen in P.

Aufgabe 44: Gravitationeller Dopplereffekt in der Schwarzschild-Ebene.
a. Bezeichnungen wie in Aufgabe 43. Seien r_E und r_S Konstanten $> 2M$. Ein Sender mit der Weltlinie $\gamma_S(t) = (t, r_S)$ in P sendet Licht mit der Frequenz ν aus; der Empfänger mit der Weltlinie $\gamma_E(t) = (t, r_E)$ in P mißt (in seiner Eigenzeit) für das ankommende Licht die Frequenz ν'. Beweise

$$\frac{\nu'}{\nu} = \sqrt{\frac{1 - 2M/r_S}{1 - 2M/r_E}}.$$

b. Zeige, daß dieselbe Formel auch in der vierdimensionalen Schwarzschild-Welt für Licht gilt, das sich radial zum Zentralkörper ausbreitet (d.h. $\vartheta = const, \varphi = const$).
Berechne den Wert von $\frac{\nu'}{\nu} - 1$ im Falle der Erde für $r_E =$ Erdradius und $r_S = r_E + h,\ 0 < h << r_E$.

Numerische Werte:
Masse der Erde $M = 5.98 \cdot 10^{27}$ g,
Erdradius $r_E = 6370$ km,
Gravitations-Konstante $G = 6.67 \cdot 10^{-8} \frac{cm^3}{\text{g sec}}$,
Lichtgeschwindigkeit $c = 3 \cdot 10^{10}$ sec.

Abgabetermin: Mittwoch, den 24.7.1996, 13.15 Uhr.