Mathematisches Institut der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

SS 1996
Blatt 10

Übungen zur Vorlesung: Der Minkowski-Raum

Aufgabe 37: Sei M eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit. Zeige:
a. Ist g_R eine Riemannsche (d.h. positiv definite) Metrik auf M und ω ein kovariantes Vektorfeld auf M mit $g_R^*(\omega,\omega) \equiv 1$, so ist $g_L := 2\,\omega\otimes\omega - g_R$ eine Lorentz-Metrik auf M.
b. Ist g_L eine Lorentz-Metrik auf M und und ω ein kovariantes Vektorfeld auf M mit $g_R^*(\omega,\omega) \equiv 1$, so ist $g_R := 2\,\omega\otimes\omega - g_L$ eine Riemannsche Metrik auf M.

Aufgabe 38: Sei $g = \sum g_{ij}\,dx^i \otimes dx^j$ eine (beliebig oft stetig differenzierbare) Metrik der Signatur (l,m) auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$.
Sei $\gamma := \sqrt{|\det(g_{ij})|}$. Zeige für den d'Alembert-Operator

$$\Box = \delta d : \mathcal{C}^\infty(U) \to \mathcal{C}^\infty(U)$$

die Formel

$$\Box = -\frac{1}{\gamma}\sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial x^i}(\gamma g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}) = \sum_{i,j} g^{ij}\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_j(\frac{1}{\gamma}\sum_i \frac{\partial(\gamma g^{ij})}{\partial x^i})\frac{\partial}{\partial x^j}$$

Aufgabe 39: Man berechne den Laplace-Operator im $\mathbb{R}^3$ in Zylinder- bzw. in Polarkoordinaten.

Aufgabe 40: Die Metrik in der Schwarzschild-Welt mit Koordinaten (t,r,ϑ,φ) ist wie folgt definiert:

$$g = (1-\frac{2M}{r})dt^2 - (1-\frac{2M}{r})^{-1}dr^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2).$$

Dabei ist $M > 0$ eine Konstante (Masse des Zentralkörpers) und $r > 2M$.

a) Man berechne den d'Alembert-Operator $\Box$ für die Schwarzschild-Metrik.

b.w.

b) Sei $\rho :]2M, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der Differential-Gleichung

$$\rho'(r) = \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}.$$

Man zeige: Für beliebige 2-mal stetige Funktionen f, g einer reellen Veränderlichen ist

$$u(t,r) := f(t - \rho(r)) + g(t + \rho(r))$$

eine (nur von t und r abhängende) Lösung der Wellengleichung $\Box u = 0$ in der zweidimensionalen Schwarzschild-Welt.

Abgabetermin: Mittwoch, den 17.7.1996, 13.15 Uhr.