Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

SS 1996

Blatt 9

Übungen zur Vorlesung: Der Minkowski-Raum

Aufgabe 33: Gegeben sei ein elektromagnetisches Feld F auf $\mathbb{M}_4$.
Der elektromagnetische Energie-Impuls-Tensor ist ein 2-fach kovariantes symmetrisches Tensorfeld T auf $\mathbb{M}_4$, so daß bzgl. jedes inertialen Koordinatensystems $(e_0, \ldots, e_3)$ gilt:

$$T_{00} = \tfrac{1}{2}(\| \vec{E} \|^2 + \| \vec{B} \|^2).$$

Zeige:

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu i} F^{ik} g_{k\nu} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{ik} F^{ik}.$$

(Beachte die Einsteinsche Summationskonvention!)
(Siehe Aufgabe 32.)

Aufgabe 34: a. Sei V ein orientierter n-dimensionaler Vektorraum mit zwei konform äquivalenten Metriken $g, \tilde{g}$ (d.h. es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus 0$ mit $\tilde{g} = \lambda^2 g$). Für jedes $k = 0, \ldots, n$ hat man zwei Hodgesche *-Operatoren

$$*, \tilde{*} : \Lambda^k V^* \to \Lambda^{n-k} V^*,$$

wobei $*$ mithilfe von g und $\tilde{*}$ mithilfe von $\tilde{g}$ definiert ist.
Zeige: $\tilde{*}\beta = \lambda^{n-2k} * \beta$ für jede k-Form $\beta \in \Lambda^k V^*$.
b. Zeige, daß die Maxwell-Gleichungen für das Vakuum konform-invariant sind, d.h. invariant bei Übergang zu einer Metrik $\tilde{g}$, die aus der Standard-Lorentz-Metrik $g = g_{\mu\nu}\, dx^\mu \otimes dx^\nu$ durch Multiplikation mit einem positiven Skalarenfeld $\varphi : \mathbb{M}_4 \to \mathbb{R}^*_+$ hervorgeht.

Aufgabe 35: Sei V ein Vektorraum und $F \in V^* \times V^*$ ein zweifach kovarianter Tensor. Für einen Vektor $\xi \in V$ ist der Kovektor $i_\xi F \in V^*$ die "Kontraktion von F durch ξ" gegeben durch

$$i_\xi F(\eta) := F(\xi, \eta), \text{ für alle } \eta \in V.$$

Bzgl. einer Basis $e_1, \ldots, e_n$ von V und der dualen Basis $\varphi^1, \ldots, \varphi^n$ von V^* berechne die Koeffizienten von $i_\xi F$ aus denen von F und ξ.

b.w.

Aufgabe 36: Sei F der elektromagnetische Feldtensor auf dem Minkowskiraum. Ein elektrisch geladenes Teilchen der Ladung e und der Vierergeschwindigkeit u erfährt im Feld F die durch den Kovektor

$$k = e\, i_u F \text{ (vgl. Aufgabe 35)}$$

(durch Hochziehen des Indizes von von k) gegebene Viererkraft.
Zeige:

$$\mathfrak{K} = e(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}),$$

wobei $\mathfrak{K}$ die Newtonsche Dreierkraft (Lorentzkraft) und $\overrightarrow{v}$ die zu u gehörige Dreiergeschwindigkeit ist.

Abgabetermin: Mittwoch, den 10.7.1996, 13.15 Uhr.