Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

SS 1996

Blatt 8

Übungen zur Vorlesung: Der Minkowski-Raum

Aufgabe 29: Im $\mathbb{R}^3$ mit der üblichen euklidischen Metrik und natürlichen Orientierung sei $U := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \neq (0,0)\}$.
Seien r, θ, φ die Polarkoordinaten.
a. Zeige, daß $dr, d\theta, d\varphi$ in jedem Punkt $a \in U$ eine positiv orientierte Orthogonalbasis von T_a^*U bilden und berechne die Normen von $dr, d\theta, d\varphi$.
b. Drücke die Volumenform durch $dr, d\theta, d\varphi$ aus und berechne $*dr, *d\theta, *d\varphi$.

Aufgabe 30: Betrachte im Minkowski-Raum die beiden 2-Formen
$\omega = \langle \vec{a}, d\vec{s} \rangle \wedge dt + \langle \vec{b}, d\vec{S} \rangle$ und $\omega' = \langle \vec{a}', d\vec{s} \rangle \wedge dt + \langle \vec{b}', d\vec{S} \rangle$.
Zeige: $\omega \wedge \omega' = (\langle \vec{a}, \vec{b}' \rangle + \langle \vec{a}', \vec{b} \rangle)\ d^3x \wedge dt$.
b. Beweise unter Verwendung von a., daß die skalaren Funktionen $\langle \vec{E}, \vec{B} \rangle$ und $\|\vec{E}\|^2 - \|\vec{B}\|^2$ zu einem gegebenen elektromagnetischen Feld F Lorentz-Invarianten sind (d.h. invariant gegenüber Koordinatentransformationen aus $\mathrm{SO}^+(1,3)$).

Aufgabe 31: Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum ($n > 1$), und seien $g, \tilde{g}$ zwei Metriken auf V mit Signatur $(1, n-1)$, die den gleichen Lichtkegel definieren:

$$L_g := \{x \in V : g(x,x) = 0\} = \{x \in V : \tilde{g}(x,x) = 0\} =: L_{\tilde{g}}.$$

Zeige, daß es ein $\lambda \in \mathbb{R}^*$ gibt mit $\tilde{g} = \lambda g$. Für $n > 2$ ist λ positiv.

Aufgabe 32: Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum mit Lorentz-Metrik (d.h. Signatur $(1, n-1)$), und sei T ein 2-fach kovarianter symmetrischer Tensor, d.h. eine symmetrische Bilinearform

$$T : V \times V \to \mathbb{R}.$$

Zeige: Ist $T(\xi, \xi) = 0$ für alle zeitartigen Vektoren $\xi \in V$, so ist $T \equiv 0$.

Abgabetermin: Mittwoch, den 3.7.1996, 13.15 Uhr.