Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

SS 1996

Blatt 7

Übungen zur Vorlesung: Der Minkowski-Raum

Aufgabe 25: In einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ sei die Differentialform

$$\omega = \sum_{i<k} \omega_{ik}\, dx_i \wedge dx_k \quad \in \Omega^2(U)$$

gegeben. Sei

$$d\omega =: \sigma = \sum_{i<j<k} \sigma_{ijk}\, dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k$$

.
Zeige:

$$\sigma_{ijk} = \partial_i w_{jk} + \partial_j \omega_{ki} + \partial_k \omega_{ij}.$$

Dabei ist $\partial_\nu := \frac{\partial}{\partial x_\nu}$ und $\omega_{ki} := -\omega_{ik}$ für $i < k$.

Aufgabe 26: Das elektromagnetische Feld F zeige bzgl. eines inertialen Koordinatensystems (x_0, x_1, x_2, x_3) das elektrische Feld $\vec{E} = (E_1, E_2, E_3)$ und das magnetische Feld $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$. Es werde vorausgesetzt, daß $F(0) \neq 0$.
a. Zeige: Es gibt einen Vektor $\vec{n} \in \mathbb{R}^3, \| \vec{n} \| = 1$, und ein $\psi \in \mathbb{R}$, so daß :

$$\vec{n} \tanh 2\psi = \frac{2\, \vec{E}(0) \times \vec{B}(0)}{\| \vec{E}(0) \|^2 + \| \vec{B}(0) \|^2}.$$

b. Betrachte ein zweites Koordinatensystem (x_0', x_1', x_2', x_3'), das sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit $v = \tanh \psi$ in Richtung $\vec{n}$ gegenüber dem ersten bewegt. Zeige, daß bzgl. des neuen Inertialsystems das elektrische Feld $\vec{E}'$ und das magnetische Feld $\vec{B}'$ im Nullpunkt parallel sind.

Aufgabe 27: Das elektromagnetische Feld F zeige bzgl. eines inertialen Koordinatensystems (x_0, x_1, x_2, x_3) das elektrische Feld $\vec{E}$ und das magnetische Feld $\vec{B}$ und bzgl. eines inertialen Koordinatensystems (x_0', x_1', x_2', x_3'), das aus dem ersteren durch eine eigentliche Lorentztransformation $x' = Sx, S \in \mathrm{SO}^+(1,3)$, hervorgehe, das elektrische Feld $\vec{E}'$ und das magnetische Feld $\vec{B}'$.

a. Zeige: Es gibt eine Matrix $D(S) \in \mathrm{SO}(3,\mathbb{C})$, so daß $\vec{E}'+i\vec{B}' = D(S)(\vec{E}+i\vec{B})$. Dabei ist die spezielle komplex-orthogonale Gruppe definiert durch

$$\mathrm{SO}(n,\mathbb{C}) := \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) : A^{\mathsf{T}} A = 1, \det A = 1\}.$$

(Hinweis: Benütze die Aufgaben 12, 21, 22)
b. Zeige, daß die Zuordnung $S \mapsto D(S)$ eine Darstellung (d.h. einen Gruppenhomomorphismus) $D : \mathrm{SO}^+(1,3) \to \mathrm{SO}(3,\mathbb{C})$ liefert.
c. Was passiert für Lorentztransformationen $S \in \mathrm{O}^+(1,3)$ mit $\det S = -1$?

(Bemerkung: Man kann zeigen, daß D sogar ein Gruppenisomorphismus ist. Dazu beweist man zuerst die Isomorphie der Lie-Algebren.)

Aufgabe 28: Sei $\alpha : V \to \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen, eine stetig differenzierbare, injektive Abbildung. Das Einheits-Normalenfeld auf $\alpha(V)$ ist diejenige eindeutig bestimmte Abbildung $\vec{\nu} : \alpha(V) \to \mathbb{R}^n$, die die folgenden drei Eigenschaften hat:

1. $\vec{\nu} \circ \alpha \perp \frac{\partial\alpha}{\partial t_j}$, für alle $1 \le j \le n-1$.
2. $\| \vec{\nu} \| = 1$.
3. $\det(\vec{\nu} \circ \alpha, \frac{\partial\alpha}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial\alpha}{\partial t_{n-1}}) > 0$.

Zeige: Für jedes Kompaktum $K \subset V$ und jedes auf einer offenen Umgebung U von $\alpha(K)$ stetige Vektorfeld $F : U \to \mathbb{R}^n$ gilt

$$\int_{\alpha(K)} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \int_{\alpha(K)} \langle \vec{F}, \vec{\nu} \rangle dS,$$

wobei

$$\int_{\alpha(K)} \langle \vec{F}, \vec{\nu} \rangle dS := \int_K \langle \vec{F} \circ \alpha, \vec{\nu} \circ \alpha \rangle \left\| \frac{\partial\alpha}{\partial t_1} \times \ldots \times \frac{\partial\alpha}{\partial t_{n-1}} \right\| dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_{n-1}.$$

Dabei ist das Kreuzprodukt $w := v_1 \times \ldots \times v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ aus $n-1$ Vektoren $v_i \in \mathbb{R}^n$ folgendermaßen definiert:
Sei V die $(n-1) \times n$-Matrix, deren Spalten die v_i's seien. V_j sei die $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, die aus V durch Streichung der j-ten Zeile entsteht.
Die j-te Komponente w_j des Vektors w ist dann $w_j := (-1)^{j+1} \det V_j$.

Abgabetermin: Mittwoch, den 26.6.1996, 13.15 Uhr.