Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

SS 1996

Blatt 6

Übungen zur Vorlesung: Der Minkowski-Raum

Aufgabe 21: Im $\mathbb{R}^3$ sei die Differentialform

$$\alpha = E_1 dx_1 + E_2 dx_2 + E_3 dx_3$$

gegeben. Es werde eine lineare Koordinatentransformation

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \text{ mit } A \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$$

durchgeführt. Bezüglich der neuen Koordinaten sei

$$\alpha = E'_1 dy_1 + E'_2 dy_2 + E'_3 dy_3.$$

Zeige:

$$\vec{E}' = A^\vee \vec{E}, \quad \text{wobei } A^\vee := (A^{-1})^\mathsf{T}.$$

Insbesondere gilt also $\vec{E}' = A\vec{E}$ für $A \in \mathrm{O}(3)$.
(Dabei bezeichne $\vec{E}$ bzw. $\vec{E}'$ den Vektor mit den Komponenten E_i bzw. E'_i.)

Aufgabe 22: Im $\mathbb{R}^3$ sei die Differentialform der Ordnung 2

$$\beta = B_1\, dx_2 \wedge dx_3 + B_2\, dx_3 \wedge dx_1 + B_3\, dx_1 \wedge dx_2$$

gegeben. Sei $y = Ax, A \in \mathrm{O}(3)$, eine orthogonale Koordinatentransformation und

$$\beta' = B'_1\, dy_2 \wedge dy_3 + B'_2\, dy_3 \wedge dy_1 + B'_3\, dy_1 \wedge dy_2.$$

Zeige:

$$\vec{B}' = (\det A)\, A\, \vec{B}.$$

b.w.

Aufgabe 23: Auf dem Gebiet $U := \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ sei das Vektorfeld

$$\vec{a}(\vec{x}) := \frac{1}{r^3}(x_1, x_2, x_3),\ r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

gegeben.
a. Zeige: $\mathrm{div}(\vec{a}) = 0$ und $\mathrm{rot}(\vec{a}) = 0$.
b. Gib eine differenzierbare Funktion f auf U an mit $\mathrm{grad}(f) = \vec{a}$.
c. Zeige, daß sich $\vec{a}$ nicht als Rotation eines Vektorfeldes auf U darstellen läßt.
(Hinweis zu c: Zeige, daß für die 2-Form

$$\omega := a_1\, dx_2 \wedge dx_3 + a_2\, dx_3 \wedge dx_1 + a_3\, dx_1 \wedge dx_2$$

gilt

$$\int_{\|\vec{x}\|=r} \omega = 4\pi,\ \text{ für alle } r > 0.)$$

Aufgabe 24: Betrachte auf $U := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \neq (0, 0)\}$ das Vektorfeld

$$\vec{b}(\vec{x}) := \frac{1}{\rho^2}(-x_2, x_1, 0),\ \rho^2 = x_1^2 + x_2^2.$$

a. Zeige, daß $\mathrm{rot}(\vec{b}) = 0$ und $\mathrm{div}(\vec{b}) = 0$.
b. Gib ein Vektorfeld $\vec{c}$ auf U an, für das $\mathrm{rot}(\vec{c}) = \vec{b}$.
c. Zeige: $\vec{b}$ ist nicht als Gradient einer differenzierbaren Funktion auf U darstellbar.
(Hinweis zu c: Integriere die 1-Form

$$\sigma := b_1 dx_1 + b_2 dx_2 + b_3 dx_3$$

längs eines Weges γ in der x_1x_2-Ebene mit der Windungszahl 1 um den Ursprung und zeige:

$$\int_\gamma \sigma = 2\pi.)$$

Abgabetermin: Mittwoch, den 19.6.1996, 13.15 Uhr.