Mathematisches Institut der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

SS 1996

Blatt 5

Übungen zur Vorlesung: Der Minkowski-Raum

Aufgabe 17: Ein Proton mit einer Energie von 10^{20} eV bewege sich ohne Wechselwirkung durch eine Galaxis (Durchmesser der Galaxis ca. 10^5 Lichtjahre; Ruhenergie des Protons ca. 10^9 eV; die Gesamtenergie ist auf das Ruhsystem der Galaxis bezogen.) Berechne die für die Durchquerung benötigte Zeit

a. im Ruhsystem der Galaxis

b. im Ruhsystem des Protons.

Aufgabe 18: Zeige, daß die relativistische kinetische Energie

$$E_{kin} = m_r c^2 - mc^2 = mc^2\Big(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1\Big)$$

nicht etwa gleich dem Ausdruck

$$\tilde{E} := \frac{1}{2} m_r v^2 = \frac{1}{2} \frac{mv^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

ist, der dadurch entsteht, daß man in der klassischen Formel einfach *Masse* durch *relativistische Masse* ersetzt. Entwickle dazu $E_{kin} - \tilde{E}$ in eine Taylorreihe bis zu den Gliedern 6.Ordnung (einschließlich) in v.

Aufgabe 19: Löse die Bewegungsgleichung

$$\mathfrak{K} = \frac{d}{dt}\frac{m\overrightarrow{v}}{\sqrt{1-v^2}} = q(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}) \quad (\text{dabei} \quad c = 1)$$

für ein geladenes Teilchen mit Ruhemasse $m > 0$ und Ladung $q \neq 0$ in einem konstanten Magnetfeld $\overrightarrow{B} \in \mathbb{R}^3, \overrightarrow{B} \neq 0$.

Anleitung: Schreibe $\overrightarrow{v}$ als Summe eines Vektors $v_\perp$, der senkrecht auf $\overrightarrow{B}$ steht, und eines Vektors $v_\parallel$, der parallel zu $\overrightarrow{B}$ ist. Zeige: $\|\overrightarrow{v}\| = const \in \mathbb{R}$ und $v_\parallel = const \in \mathbb{R}^3$. Löse dann die Differentialgleichung.

b.w.

Aufgabe 20: Ein Teilchen der Ruhemasse m bewege sich im Laborsystem unter dem Einfluß eines Newtonschen Dreierkraft-Feldes $\mathfrak{K}$.

a. Zeige, daß die Bewegungsgleichung $\frac{d}{dt}\vec{p} = \mathfrak{K}$ äquivalent ist zu

$$m\Gamma(\vec{v})\frac{d}{dt}\vec{v} = \mathfrak{K},$$

wobei $\Gamma(\vec{v})$ die $3 \times 3-$Matrix mit den Koeffizienten

$$\Gamma(\vec{v})_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{v_i v_j}{(\sqrt{1-v^2})^3}$$

ist.

b. Löse die Bewegungsgleichung für das konstante homogene Kraftfeld $\mathfrak{K} = ke_1, (k \in \mathbb{R}_+)$, mit der Anfangsbedingung

$$\vec{x}(0) = 0,\ \vec{v}(0) = we_2, (w \in \mathbb{R})$$

in nullter und in erster Näherung: Die nullte Näherung (nichtrelativistischer Fall) erhält man, indem man in der Differentialgleichung $\Gamma(\vec{v})$ durch die Einheitsmatrix ersetzt. Für die erste Näherung (erste relativistische Korrrektur) setze in $\Gamma(\vec{v})$ die nullte Näherung ein; bei der Berechnung von $\Gamma(\vec{v})^{-1}$ können Glieder 4.Ordnung in v vernachlässigt werden.

Abgabetermin: Mittwoch, den 12.6.1996, 13.15 Uhr.