

Übungen zur Vorlesung: Der Minkowski-Raum

Aufgabe 13: Betrachte im Minkowskiraum drei inertielle Beobachter $\mathbb{R}e_0, \mathbb{R}e'_0$ und $\mathbb{R}e''_0$ mit folgenden Relativgeschwindigkeiten v, v_1, v_2 :

$$g(e_0, e'_0) = \cosh \psi_1 = 1/\sqrt{1 - v_1^2}$$

$$g(e'_0, e''_0) = \cosh \psi_2 = 1/\sqrt{1 - v_2^2}$$

$$g(e_0, e''_0) = \cosh \psi = 1/\sqrt{1 - v^2}.$$

Die Projektionen der beiden Weltlinien $\mathbb{R}e_0$ und $\mathbb{R}e''_0$ schließen im Ruheraum des Beobachters $\mathbb{R}e'_0$ den Euklidischen Winkel α ein.

a. Beweise die Formeln:

$$1 - v^2 = \frac{(1 - v_1^2)(1 - v_2^2)}{(1 - v_1 v_2 \cos \alpha)^2}$$

$$\cosh \psi = \cosh \psi_1 \cosh \psi_2 - \sinh \psi_1 \sinh \psi_2 \cos \alpha.$$

b. Zeige, daß diese Formeln in dem Fall, daß die Geschwindigkeitsvektoren \vec{v}_1 und \vec{v}_2 im Ruheraum des Beobachters $\mathbb{R}e'_0$ kollinear sind, in das "eindimensionale" Additionstheorem aus der Vorlesung übergehen.

Aufgabe 14: (Nichtrelativistischer Dopplereffekt) Ein Sender bewege sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit v auf einer Geraden im dreidimensionalen Euklidischen Raum und sende Schall mit der Frequenz ν aus. Der Empfänger ruhe, wobei der minimale Abstand zur Sendergeraden d sei. Bestimme die Frequenz $\tilde{\nu}(t)$, die der Empfänger zur Zeit t mißt. (Wähle dabei den Zeitursprung so, daß zur Zeit $t = 0$ der Abstand zwischen Empfänger und Sender d ist.) Berechne außerdem die Werte für $\tilde{\nu}$, die sich bei den Grenzübergängen $t \rightarrow \infty$ und $t \rightarrow -\infty$ ergeben.

Aufgabe 15: Im Laborsystem werde die Bewegung eines Senders durch die Kurve

$$\gamma(t) = (t, R \cos \omega t, R \sin \omega t, 0)$$

beschrieben ($t, R, \omega \in \mathbb{R}; R, \omega > 0$). Der Sender strahle Lichtsignale mit der Frequenz ν ab. Mit welcher Frequenz $\tilde{\nu}$ kommen diese beim Empfänger, der im Ursprung des Laborsystems ruht an?

Bestimme

$$\frac{\tilde{\nu}}{\nu}$$

in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v von γ bzgl. des Laborsystems.

Aufgabe 16: Die Absorbtionslinien von Kalium und Wasserstoff haben bei ruhender Quelle eine Frequenz von 394 nm. Die im Spiralnebel Hydra entstehenden Absorbtionslinien werden auf der Erde mit einer Frequenz von 475 nm beobachtet. Wie groß ist die Fluchtgeschwindigkeit des Spiralnebels?

Abgabetermin: Mittwoch, den 5.6.1996, 13.15 Uhr.