Reich werden mit Mathematik

Katharina Schüller

Aktien, Renten, Fremdwährungen, Fonds... spätestens seit dem Börsen-Hype der späten 90er Jahre haben solche Anlageformen das Sparbuch vom Markt verdrängt. Eine unüberschaubare Vielfalt von potenziellen Investments konkurriert um das Vermögen privater und institutioneller Anleger. Aber welches davon macht den Weg frei zur "ersten Million"?

"Wenn Sie an der Börse erfolgreich sein wollen, dann studieren Sie Philosophie und Kunstgeschichte – da lernen Sie zu denken und zu sehen." hat es André Kostolany, der wohl bekannteste Börsen-Guru, zugespitzt ausgedrückt. Betrachten wir also einmal den Kursverlauf des Deutschen Aktien-Index DAX im Zeitraum vom 27.07.88 bis zum 14.03.97 [6, S. 29].

Heute wissen wir, dass der DAX trotz gelegentlicher Schwankungen alles andere als immer weiter gestiegen ist – obwohl es auf dem Bild so aussieht. Gerade die jüngsten Börsen-Crashs lassen befürchten, dass man die Umkehr von Trends meist erst dann erkennt, wenn es schon zu spät ist. Die Hoffnung liegt augenscheinlich wohl doch weniger in den Geisteswissenschaften als in einer anderen, aufsteigenden Disziplin: der mathematisch-statistischen Finanzanalyse. Ihr Ziel sind verlässliche Aussagen über die Attraktivität einzelner finanzieller Engagements mit Hilfe der verfügbaren Daten.

Die Finanzanalyse ist jedoch nicht nur ein Instrument, das Banken und Privatanleger "in der Praxis" bei ihren Entscheidungen unterstützt. Auch im wissenschaftlichen Kontext ökonometrischer Fragestellungen spielt die Finanzanalyse eine bedeutende Rolle. Eindrucksvoll zeigt sich das etwa daran, dass die Ökonometriker Robert Engle und Clive Granger im vergangenen Jahr 2003 für ihre Pionierarbeit über neue Analysemethoden für ökonomische Zeitreihen mit dem Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften ausgezeichnet wurden. Zwei dieser Ansätze von Engle/Granger, die auch in die Praxis Eingang gefunden haben, wollen wir näher betrachten.

Die Theorie effizienter Märkte

Am Anfang der Finanzanalyse steht ein Glaubensbekenntnis über die Vollkommenheit – besser: die Unvollkommenheit von Finanzmärkten. Nur unter gewissen Annahmen über die Beschaffenheit der Märkte ist Finanzanalyse überhaupt möglich. Diese Annahmen bringt E.F. Fama in seinen vier Thesen zur Informationseffizienz von Märkten zum Ausdruck und formalisiert sie in seiner "Theory of Efficient Markets".

Die These der *starken Informationseffizienz* besagt, dass alle bewertungsrelevanten Informationen unmittelbar und vollständig im aktuellen Marktpreis eines Investmentobjektes abgebildet sind. Unterstellt man *halbstrenge Informationseffizienz*, so sind nur alle öffentlichen Informationen derart abgebildet. Bei *schwacher Informationseffizienz* sind bloß alle Informationen über vergangene Marktpreise unmittelbar und vollständig im aktuellen Marktpreis enthalten. Glaubt man hingegen an die These *kei-*

ner Informationseffizienz, so soll keine der drei bisherigen Thesen zutreffen [6, S. 79].

Nur unter der Annahme keiner oder schwacher Informationseffizienz können finanzanalytische Verfahren überhaupt sinnvoll eingesetzt werden. Denn die Analyse kursrelevanter Informationen kann nicht zu systematischen Gewinnen verhelfen, wenn diese Informationen bereits im Preis abgebildet sind.

Technische Analyse und Fundamentalanalyse

Sind Märkte schwach informationseffizient, so macht es zwar keinen Sinn, vergangene Marktpreise (Kursverläufe) auszuwerten. Die Analyse öffentlich zugänglicher Informationen wie Geschäftsberichte oder Pressemitteilungen kann aber systematische Gewinne bringen. Einsetzbar sind dazu Methoden der *Fundamentalanalyse* (zum Beispiel multivariate statistische Verfahren), um den "inneren" Wert eines Investments aufgrund aller ihn bestimmenden Faktoren zu ermitteln. Unter diesem Blickwinkel sind Renditegenerierungsprozesse etwa durch die Modellierung funktionaler Zusammenhänge zwischen Einflussgrößen und Analyseobjekt darstellbar.

Gilt keine Informationseffizienz, so macht auch die Analyse vergangener Marktpreise Sinn. Das geschieht mit den Verfahren der *Technischen Analyse*, von denen uns hier vor allem die modernen zeitreihenanalytischen Verfahren interessieren. Renditegenerierungsprozesse werden in diesem Kontext beispielsweise durch autoregressive Modelle erklärt.

Leider kann man die Theorie effizienter Märkte, beziehungsweise eine ihrer Thesen, bisher weder beweisen noch widerlegen. In gewisser Weise können finanzanalytische Verfahren als Tests auf Informationseffizienz-Hypothesen verstanden werden. Führt etwa die Fundamentalanalyse ökonomischer Zeitreihen zu sinnvollen Ergebnissen, so können Finanzmärkte höchstens schwach informationseffizient sein. Hier steht aber schon der nächste Stolperstein.

Linearität oder Nicht-Linearität?

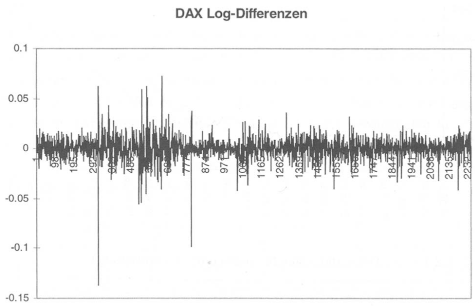
Bisher dominiert in der Finanzanalyse der Einsatz linearer Analysemethoden – mit mäßigem Erfolg. Die Untersuchung mit solchen gängigen Analyseinstrumenten setzt lineare Renditegenerierungsprozesse voraus. Renditen, die von einem nichtlinearen Prozess erzeugt werden, wirken dabei wie *white noise* (wie durch einen reinen Zufallsprozess erzeugt). Fälschlicherweise kann man das als Vorliegen von Informationseffizienz interpretieren.

Bei den finanzanalytischen Aufgabenstellungen scheint es sich um typische "unverstandene" Probleme zu handeln, bei denen mehrere Faktoren wenigstens partiell nichtlinear auf das Analyseobjekt einwirken. Das Zusammenwirken der Faktoren weist zwar vermutlich gewisse zeitliche und situative Invarianzen auf, doch es ist durch "Rauschen" gestört und weder theoretisch eindeutig erklärbar, noch empirisch ausreichend exakt beschreibbar [5, S. 7]. Ein Übergang zu nichtlinearen Verfahren erscheint also vernünftig. Neben neu entwickelten (oder wieder entdeckten) Analysemethoden der Ökonometrie und Statistik werden vereinzelt Verfahren der Künstlichen Intelligenz (Künstliche Neuronale Netze) eingesetzt.

ARCH-/GARCH-Modelle

Die ARCH-/GARCH-Modelle sind technische Analyseverfahren, die sich zur Modellierung nichtlinearer Renditegenerierungsprozesse eignen. Dabei wurde das ARCH-Modell 1982 von Engle vorgestellt [1] und 1986 von T. Bollerslev zum GARCH-Modell weiterentwickelt [6, S. 136].

Eine große Stärke des Ansatzes liegt darin, dass man damit eine typische Eigenschaft von Finanzmarktzeitreihen modellieren kann. Betrachten wir die stetigen Eintagesrenditen des logarithmierten DAX-Verlaufes vom 25.07.88 bis zum 14.03.97, so stechen die "Klumpen" von (betragsmäßig) hohen oder niedrigen Renditen ins Auge [6, S. 29]:



Auf große Kursausschläge folgen oft wieder große Kursausschläge, auf kleine wieder kleine. Man nennt dieses Phänomen bildlich *volatility clustering*. Legt man zur Erklärung einer solchen Finanzmarktzeitreihe $\{y_t\}$ einen autoregressiven Prozess p-ter Ordnung (AR(p)-Prozess) gemäß

$$y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + u_t \quad (1)$$

mit y_t beobachteter Kurs/Rendite zum Zeitpunkt t
ϕ_t (zu schätzender) Koeffizient
u_t Störgröße

und u_t zunächst als White-Noise-Prozess, so werden die Stationarität und insbesondere die Varianzstationarität von $\{y_t\}$ vorausgesetzt. Anscheinend verlaufen die Varianzen empirisch beobachtbarer Renditeverläufe aber zeitabhängig und abwechselnd in Phasen hoher und niedriger Volatilität. Die Modellierung dieser Volatilität ist selbst einerseits etwa zur Bestimmung des "fairen" Preises einer Option von zentraler Bedeutung. Andererseits beeinflusst eine sich ändernde Varianz erheblich die Schätzung der Koeffizienten ϕ_t des AR(p)-Prozesses in (1).

Die Idee ist nun, auch die Zeitreihe der Störgrößen $\{u_t\}$ zu modellieren:

$$u_t = \varepsilon_t \sqrt{\sigma_t^2} \quad (2)$$

mit ε_t unabhängig N(0;1)-verteilte Zufallsgröße zum Zeitpunkt t

und

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_m u_{t-m}^2 \ . \quad (3)$$

Die Folge der Störgrößen $\{u_t\}$ in (1) wird damit selbst als ein multiplikativer autoregressiver Prozess modelliert und heißt *autoregressive conditional heteroscedastic process* der Ordnung m. Ein ARCH-Modell besteht also aus zwei Teilen:

- dem Modell der Zeitreihe $\{y_t\}$ wie z.B. in (1)
- dem Modell der Störgrößen $\{u_t\}$ wie z.B. in (2) und (3)

Bei der Erweiterung zum GARCH-Modell (*generalized ARCH*) berücksichtigt man zusätzlich die historische (bedingte) Varianz $\sigma_{t-1}^2, \sigma_{t-2}^2$ usw. Damit wird (3) zu

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_m u_{t-m}^2 + \\ &\quad + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \cdots + \beta_n \sigma_{t-n}^2 \ . \quad (4)\end{aligned}$$

Ein solches Modell heißt GARCH(n, m)-Modell.

Von anderen nichtlinearen ARCH-Erweiterungen wie dem Integrated GARCH-Modell oder dem exponentiellen GARCH-Modell, die eine immer feinere Modellierung der Varianz von u_t erlauben, ist für die Finanzanalyse vor allem das ARCH-in-Mean Modell (ARCH-M) brauchbar. Dabei fügt man die bedingte Varianz σ_t von u_t als exogenen Einflussfaktor in das Modell der Zeitreihe $\{y_t\}$ ein. Das ARCH-M erklärt dann die erwartete Rendite eines Investments nicht nur durch die eigene Historie, sondern auch durch die erwartete Varianz der Störgröße. Simultan kann also mit Hilfe eines ARCH-M ein Modell für die erwartete Rendite, die Volatilität und den Preis des "Risikos" geschätzt werden.

Beispiel 1: simulierter ARCH-Prozess
Ein einfaches Beispiel [6, S. 139] für einen ARCH-Prozess ist:

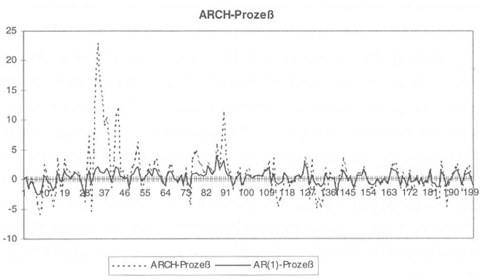
$$R_t = 0.5R_{t-1} + u_t \qquad (5)$$

Modell der Rendite (AR(1)-Prozess)

$$\begin{aligned} u_t &= \varepsilon_t \sqrt{h_t} \\ h_t &= 1 + 0.7u_{t-1}^2 + 0.5u_{t-2}^2 \qquad (6) \end{aligned}$$

Modell der Volatilität (ARCH(2)-Prozess)

Simuliert man das ARCH-Modell und im Vergleich dazu den AR(1)-Prozess nach (5), so zeigt sich folgendes Bild [6, S. 74]:



Aus den Werten des simulierten ARCH-Prozesses sollen nun die Koeffizienten eines Modells geschätzt werden. Unterstellt man einen einfachen AR(1)-Prozess wie in (5), so liefert die Schätzung mittels einer gewöhnlichen Regressionsanalyse den Wert 0.669 – der wahre Wert beträgt 0.5. Unterstellt man ein ARCH(2)-Modell, so muss die Kleinste-Quadrate-Schätzung (KQ) bedingt durch die Heteroskedastizität von $\{u_t\}$ bzw. $\{R_t\}$ korrigiert werden. Als Schätzwert ergibt sich 0.476.

Im Gegensatz zum reinen AR-Modell tritt im ARCH-Modell sichtlich ein *volatility clustering* auf. Weil dieses eine typische Eigenschaft realer Finanzmarktzeitreihen ist, sind ARCH-/GARCH-Prozesse so populär. Nichtlinearitäten können solche Modelle aber nur im Störgrößen-Teilmodell und nicht im Teilmodell der Zeitreihe $\{y_t\}$ erfassen.

Dafür sind andere Ansätze nötig, wie etwa schwellenwert-autoregressive Modelle (*threshold autoregressive models, TAR*). TAR-Prozesse zeigen ebenfalls ein *volatility clustering*, sind aber so komplex, dass man sie in der Praxis nicht identifizieren und schätzen kann.

Kointegration und Fehlerkorrekturmodelle

Das Konzept der Kointegration von Zeitreihen und die darauf aufbauenden Fehlerkorrekturmodelle sind Werkzeuge der Fundamentalanalyse. Dabei wird die Zeitreihe einer abhängigen Variablen als Funktion von einer oder mehrerer "kausal erklärender" Zeitreihen unabhängiger Variablen modelliert. Durch die Arbeiten von Engle und Granger [2, 4] ist diesen Verfahren der Durchbruch gelungen.

Manchmal entwickeln sich zwei (oder mehrere; wir beschränken uns auf zwei) Zeitreihen ökonomischer Größen sehr ähnlich. Das kann man vor allem dann beobachten, wenn diese Größen in enger substitutiver Beziehung stehen, wie etwa die Preise einer bestimmten Ware an zwei Handelsplätzen. Die Differenzen der Preise auf beiden Märkten sollten dann keine Struktur besitzen, sondern einen reinen *White-Noise*-Prozess darstellen. Bei systematischen, dauerhaften Preisunterschieden würde man sonst die Ware am einen Ort billig kaufen und am anderen Ort teuer verkaufen – Ökonomen nennen solche Geschäfte "Arbitrage". Es gibt also einen arbitragefreien, gemeinsamen Gleichgewichtspfad, an den die Preisverläufe gebunden sind.

Für die Definition von Kointegration brauchen wir formale Charakterisierungen solcher Zeitreihen. Vereinfacht heißt eine Zeitreihe $\{x_t\}$ *integriert* von der Ordnung 0 ($x \sim \mathrm{I}(0)$), wenn $\{x_t\}$ stationär ist. Eine Zeitreihe heißt integriert von der Ordnung d, wenn nach d-maliger Differenzenbildung die transformierte Zeitreihe $\{\Delta^d x_t\}$ integriert von der Ordnung 0 ist.

Regeln für lineare Zusammenhänge zwischen $\mathrm{I}(0)$- und $\mathrm{I}(1)$-Reihen sind:

a) $x \sim \mathrm{I}(0), z_t = a + bx \Rightarrow z \sim \mathrm{I}(0)$, $x \sim \mathrm{I}(1), z_t = a + bx \Rightarrow z \sim \mathrm{I}(1)$

b) $x \sim \mathrm{I}(0), y \sim \mathrm{I}(0), z_t = ax_t + by_t \Rightarrow z \sim \mathrm{I}(0)$

c) $x \sim \mathrm{I}(1), y \sim \mathrm{I}(0), z_t = ax_t + by_t \Rightarrow z \sim \mathrm{I}(1)$

d) Im Allgemeinen gilt:

   $x \sim \mathrm{I}(1), y \sim \mathrm{I}(1), z_t = ax_t + by_t \Rightarrow z \sim \mathrm{I}(1)$

Gilt jedoch abweichend von d): $x \sim \mathrm{I}(1)$, $y \sim \mathrm{I}(1)$, und existiert eine lineare Verknüpfung $z_t = m + ax_t + by_t$ mit $z \sim \mathrm{I}(0)$, dann heißen die Zeitreihen $\{x_t\}$, $\{y_t\}$ *kointegriert*.

Ein Beispiel von Engle/Granger [3, S. 6] zeigt, wie es zu diesem Sonderfall kommen kann. Es seien

$$\begin{aligned} x_t &= AW_t + \tilde{x}_t \\ y_t &= W_t + \tilde{y}_t \end{aligned}$$

mit $W_t \sim \mathrm{I}(1)$ und $\tilde{x}_t, \tilde{y}_t \sim \mathrm{I}(0)$. Nach c) gilt $x_t, y_t \sim \mathrm{I}(1)$, aber die Linearkombination

$$z_t = x_t - Ay_t = \tilde{x}_t - A\tilde{y}_t$$

ist nach b) integriert von der Ordnung 0. $\{x_t\}$ und $\{y_t\}$ sind also kointegriert, weil es einen gemeinsamen $\mathrm{I}(1)$-Faktor $\{W_t\}$ gibt – den gemeinsamen "kausalen" Gleichgewichtspfad. Engle/Granger verallgemeinern diese Aussage auch auf n Zeitreihen.

Ein weiterer Schritt gelang den beiden mit dem *Granger-Repräsentationstheorem*: Kointegrierte Zeitreihenvariablen besitzen diesem Theorem zufolge auch eine Fehlerkorrekturdarstellung des Datengenerierungsprozesses. Umgekehrt sind Reihen, die von einem Fehlerkorrekturmechanismus generiert wurden, stets kointegriert. Seien also $x \sim \mathrm{I}(1)$, $y \sim \mathrm{I}(1)$ kointegriert, dann lassen sich $\{x_t\}$ und $\{y_t\}$ darstellen gemäß

$$\begin{aligned} \Delta x_t &= a_1 + \sum_{i=1}^{k} b_{1i}\Delta x_{t-i} \\ &\quad + \sum_{i=0}^{m} c_{1i}\Delta y_{t-1} - d_1 z_{t-1} + \varepsilon_{1t} \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \Delta y_t &= a_2 + \sum_{i=0}^{k} b_{2i}\Delta x_{t-i} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{m} c_{2i}\Delta y_{t-1} - d_2 z_{t-1} + \varepsilon_{2t} \end{aligned}$$

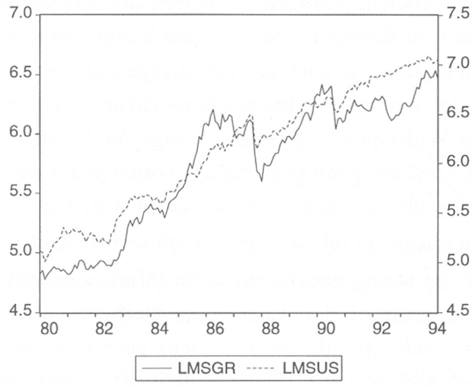
mit $z_t = x_t - Ay_t$ (Gleichgewichtsfehler; kointegrierende Linearkombination). Setzt man nun b_{2i}, $c_{2i} = 0$ für alle $i \geq 1$, so enthüllt sich eine bemerkenswerte Eigenschaft. Es verbleibt dann

$$\Delta y_t = a_2 + b_{20}\Delta x_t - d_2 z_{t-1} + \varepsilon_{2t} \quad .$$

Die Veränderung einer (abhängigen) Zeitreihenvariablen zum Zeitpunkt t kann somit als lineare Funktion der Veränderung einer (unabhängigen) Zeitreihenvariablen in t und dem Gleichgewichtsfehler der vorhergehenden Periode dargestellt werden. Bei kointegrierten Variablen ist wenigstens einer der Koeffizienten d_1, d_2 von 0 verschieden. Ein Teil der zukünftigen Veränderungen kann also mit Hilfe der bereits heute vorliegenden Information vorhergesagt werden. Damit folgt sofort, dass ein Markt, auf dem kointegrierte Kursverläufe auftreten, nicht informationseffizient sein kann.

Beispiel 2: Kointegration deutscher/US-amerikanischer Aktienmarkt
Im zweiten Beispiel [6, S. 197] betrachten wir den deutschen und den US-amerikanischen Aktienmarkt. Zur Untersuchung einer möglichen Kointegrationsbeziehung dienen die Morgan Stanley Performance Indizes (MS) für den deutschen (GR) und den US-Markt (US). Der Kointegrationstest basiert auf 173 monatlichen Beobachtungen von Januar 1978 bis Mai 1994, die wie in der folgenden Abbildung [6, S. 198] zunächst logarithmiert (L) wurden.

Es sieht so aus, als würde der deutsche Aktienmarkt mit mehr oder weniger starken, unsystematischen Schwankungen dem US-Markt in seiner Entwicklung folgen. Möglicherweise existiert ein gemeinsamer Gleichgewichtspfad?



Im ersten Schritt einer Kointegrationsprüfung muss der Integrationsgrad der Reihen LMSGR und LMSUS festgestellt werden. Dies geschieht mit den üblichen Tests auf Stationarität (Dickey-Fuller Test (DF), Augmented Dickey-Fuller Test) für die logarithmierten Reihen beziehungsweise für deren n-te Differenzen. Im Beispiel können für die Reihen der ersten Differenzen bereits schwach stationäre Prozesse angenommen werden. Somit sind LMSGR und LMSUS offenbar $\mathrm{I}(1)$-Reihen.

Im nächsten Schritt ist die kointegrierende Regression nach

$$\mathrm{LMSGR}_t = \alpha + \beta\,\mathrm{LMSUS}_t + \varepsilon_t$$

zu schätzen. Die KQ-Schätzung der Koeffizienten ergibt $\hat{\alpha} = 0.534$ und $\hat{\beta} = 0.848$. Ob LMSGR und LMSUS kointegriert sind, kann man daran noch nicht erkennen. Kointegration liegt vor, wenn die geschätzten Residuen $\hat{\varepsilon}_t$ vom Integrationsgrad 0 sind, also schwach stationäre Prozesse. Als Testverfahren wird der DF-Test mit den für geschätzte Residuen einer Regression geeignet modifizierten kritischen Werten verwendet, so wie sie etwa von Engle/Yoo [6,

S. 194] ermittelt wurden. Tatsächlich werden diese kritischen Testwerte nicht einmal auf dem 10%-Niveau erreicht. Eine Kointegration beider Aktienmärkte kann also nicht angenommen werden.

Hätte man ein "besseres", statistisch signifikantes Testergebnis erzielt, so könnte man anschließend die Fehlerkorrekturdarstellung schätzen:

$$\begin{aligned}\Delta \mathrm{LMSGR}_t &= \alpha + \beta_1\, \mathrm{LMSUS}_t \\ &\quad + \beta_2\, \mathrm{EMSGR}_{t-1} + \varepsilon_t\end{aligned}$$

mit EMSGR_{t-1} als den (geschätzten) Residuen der kointegrierenden Regressionsgleichung zum Zeitpunkt $t-1$. Für die Beispieldaten ergibt sich ein Schätzwert von $\hat{\beta}_2 = -0.048$, der auf dem 5%-Niveau signifikant ist. Vielleicht liegt für den untersuchten Zeitraum also doch Kointegration vor – eine eindeutige Antwort gibt es nicht. Reale Finanzmarktdaten sind eben meistens nicht idealtypisch.

Für den Praxiseinsatz würde man – vorausgesetzt, die Kointegrationsbeziehung ist nachweisbar – jetzt noch die recht geringe Erklärungskraft des Modells ($\mathrm{R}^2 = 0.224$) durch die Hinzunahme externer Einflussgrößen zu steigern versuchen.

Reich werden mit Mathematik?

Der Weg zur "ersten Million" ist von Robert Engle und Clive Granger ein wenig begradigt worden – dennoch ist er nicht weniger steinig. Oder anders gesagt: Das Verständnis für die Funktionsweisen der Finanzmärkte wächst, die Schätzproblematik bleibt. Finanzmärkte sind ziemlich unberechenbar.

Engles Arbeiten helfen dabei, zufällige Einflüsse in Datenreihen besser herauszufiltern und so Trendentwicklungen deutlicher erkennbar zu machen. Granger hat Methoden entwickelt, mit denen beurteilt werden kann, wann man aus dem Vergleich von Datenreihen Schlussfolgerungen über Kausalzusammenhänge treffen darf, und wann man auf Scheinkorrelationen hereinfällt.

Grangers Verfahren sind für die Analyse gesamtwirtschaftlicher Zusammenhänge von großer Bedeutung. Sie erlauben die Auswertung der Menge aller öffentlich zugänglichen Informationen und kommen so unserem naiven Verständnis dessen, was Aktienkurse beeinflusst, entgegen. Methodisches Manko sind nach wie vor die unterstellten linearen funktionalen Zusammenhänge. Man braucht es nicht so dramatisch zu sehen wie John Maynard Keynes, der nichts so unheilvoll fand "wie eine rationale Investmentpolitik in einer irrationalen Welt". Aber ein bisschen Kunst gehört neben all der Wissenschaft auch dazu, um auf den Finanzmärkten das große Geld zu machen – so wie in der Mathematik eben.

Literatur

[1] Engle, R.F.: Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation, Econometrica, Vol. 50, No. 4 (1982), 987-1007

[2] Engle, R.F., Granger, C.W.J.: Co-Integration and Error Correction: Representation, Estimation, and Testing, Econometrica, Vol. 55, No. 2 (1987), 251-276

[3] Engle, R.F., Granger, C.W.J.: 'Introduction', Long-Run Economic Relationships, Readings in Cointegration, New York 1991, 1-16

[4] Granger, C.W.J.: Co-Integrated Variables and Error-Correcting Models, Discussion Paper 83-13, University of California, San Diego 1983

[5] Poddig, Th.: Analyse und Prognose von Finanzmärkten, Bad Soden, 1996

[6] Poddig, Th.: Handbuch Kursprognose: Quantitative Methoden im Asset Management, Bad Soden/Ts. 1999