Lösungen zu Blatt 9 der Übungen zur Vorlesung *Analysis II für Statistiker*, LMU-München, Sommersemester 2011

Florian Hoffmann, Peter Philip

8. Juli 2011

1. (5 Punkte) Gegeben seien

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad f(x,y) := (x-y, xy^2),$$
$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad g(x,y) := (e^{x^2 y}, \sin x \cos y^2).$$

Geben Sie die Abbildung $g \circ f$ an und berechnen Sie daraus direkt $D(g \circ f)(x,y)$ (ohne Benutzung der mehrdimensionalen Kettenregel). Wenn das Ergebnis diverse längliche Terme enthält, ist das kein Grund zur Besorgnis.

Lösung: Es ist $g \circ f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$(g \circ f)(x,y) = g(f(x,y)) = g(x-y, xy^2) = (e^{(x-y)^2 xy^2}, \sin(x-y)\cos(x^2y^4)).$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
\partial_x (g \circ f)_1(x,y) &= (3x^2 - 4xy + y^2)\, y^2\, e^{(x-y)^2 xy^2},\\
\partial_y (g \circ f)_1(x,y) &= 2xy(x^2 - 3xy + 2y^2)\, e^{(x-y)^2 xy^2},\\
\partial_x (g \circ f)_2(x,y) &= \cos(x-y)\cos(x^2y^4) - 2xy^4 \sin(x-y)\sin(x^2y^4),\\
\partial_y (g \circ f)_2(x,y) &= -\cos(x-y)\cos(x^2y^4) - 4x^2y^3 \sin(x-y)\sin(x^2y^4),
\end{aligned}$$

also

$$D(g \circ f)(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x (g \circ f)_1(x,y) & \partial_y (g \circ f)_1(x,y) \\ \partial_x (g \circ f)_2(x,y) & \partial_y (g \circ f)_2(x,y) \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} (3x^2 - 4xy + y^2)\, y^2\, e^{(x-y)^2 xy^2} & 2xy(x^2 - 3xy + 2y^2)\, e^{(x-y)^2 xy^2} \\ \cos(x-y)\cos(x^2y^4) - 2xy^4 \sin(x-y)\sin(x^2y^4) & -\cos(x-y)\cos(x^2y^4) - 4x^2y^3 \sin(x-y)\sin(x^2y^4) \end{pmatrix}$$

2. (5 Punkte) Berechnen Sie die Hessematrix, also die Matrix

$$H_f(r,\phi,\theta) := \begin{pmatrix} \partial_r\partial_r f(r,\phi,\theta) & \partial_r\partial_\phi f(r,\phi,\theta) & \partial_r\partial_\theta f(r,\phi,\theta) \\ \partial_\phi\partial_r f(r,\phi,\theta) & \partial_\phi\partial_\phi f(r,\phi,\theta) & \partial_\phi\partial_\theta f(r,\phi,\theta) \\ \partial_\theta\partial_r f(r,\phi,\theta) & \partial_\theta\partial_\phi f(r,\phi,\theta) & \partial_\theta\partial_\theta f(r,\phi,\theta) \end{pmatrix},$$

der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(r,\phi,\theta) = r\cos\phi\sin\theta$.

Lösung : Berechnung der ersten partiellen Ableitungen ergibt

$$\partial_r f(r,\phi,\theta) = \cos\phi\sin\theta, \qquad \partial_\phi f(r,\phi,\theta) = -r\sin\phi\sin\theta, \qquad \partial_\theta f(r,\phi,\theta) = r\cos\phi\cos\theta.$$

Damit ergibt sich für die Hessematrix

$$H_f(r,\phi,\theta) = \begin{pmatrix} 0 & -\sin\phi\sin\theta & \cos\phi\cos\theta \\ -\sin\phi\sin\theta & -r\cos\phi\sin\theta & -r\sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi\cos\theta & -r\sin\phi\cos\theta & -r\cos\phi\sin\theta \end{pmatrix}.$$

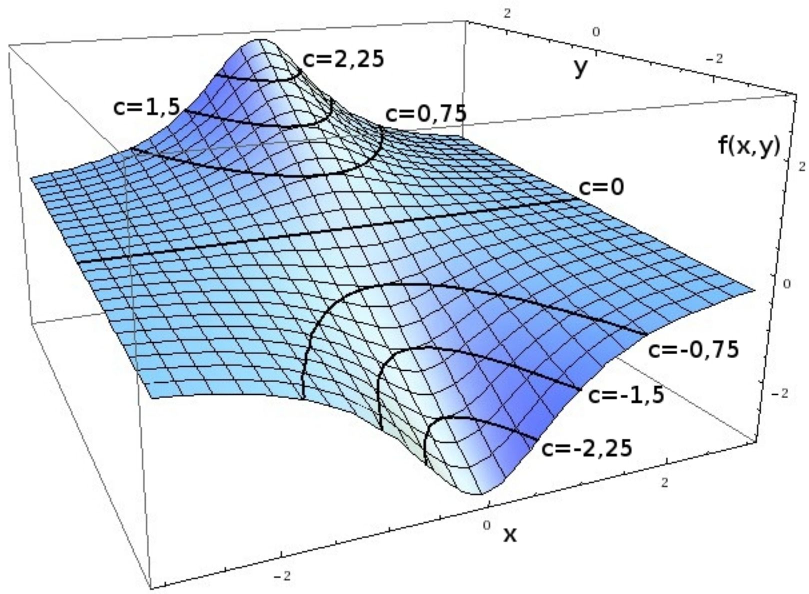
3. (5 Punkte) Veranschaulichen Sie den Graph der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x,y) := \frac{y}{x^2+1}$$

in einer geeigneten Umgebung von $(x,y) = (0,0)$, indem Sie den Graph entweder mit einem Computerprogramm plotten und ausdrucken, oder indem Sie per Hand Niveaulinien in der x-y-Ebene zeichnen, die Sie durch Auflösen der Gleichung
$C = f(x,y)$ nach y für geeignete $C \in \mathbb{R}$ gewonnen haben. Tragen Sie mindestens 7 verschiedene Werte von C (auch für den Fall, dass Sie die Funktion mit dem Computer plotten) an den entsprechenden Niveaulinien in die Grafik ein.

Lösung :

Schwarz eingezeichnet sind die Höhenlinien $f(x) = c =$ konstant zu sehen. (Bild auf der nächsten Seite)



4. (5 Punkte) Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$, $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ sowie $v : G \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Nehmen Sie an, dass alle partiellen Ableitungen erster Ordnung von f und v (d. h. von den Koordinatenfunktionen v_1, v_2, v_3) auf ganz G existieren. Beweisen Sie die folgende Gleichheit von Funktionen auf G:
$$\operatorname{rot}(fv) = f\operatorname{rot}v + (\operatorname{grad}f) \times v. \tag{1}$$
Lösung : Genaugenommen sollte man als erstes bemerken, dass alle in $\operatorname{rot}(fv)$ auftretenden Ableitungen von Produkten nach der eindimensionalen Produktregel existieren, und somit auch $\operatorname{rot}(fv)$ auf ganz G existiert. Man rechnet dann
$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}(fv) &= \Big(\partial_2(fv_3) - \partial_3(fv_2),\, \partial_3(fv_1) - \partial_1(fv_3),\, \partial_1(fv_2) - \partial_2(fv_1)\Big) \\
&= \Big((\partial_2 f)v_3 + f\partial_2 v_3 - (\partial_3 f)v_2 - f\partial_3 v_2, \\
&\quad (\partial_3 f)v_1 + f\partial_3 v_1 - (\partial_1 f)v_3 - f\partial_1 v_3, \\
&\quad (\partial_1 f)v_2 + f\partial_1 v_2 - (\partial_2 f)v_1 - f\partial_2 v_1\Big) \\
&= \Big(f(\partial_2 v_3 - \partial_3 v_2), f(\partial_3 v_1 - \partial_1 v_3), f(\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1)\Big) \\
&\quad + \Big((\partial_2 f)v_3 - (\partial_3 f)v_2, (\partial_3 f)v_1 - (\partial_1 f)v_3, (\partial_1 f)v_2 - (\partial_2 f)v_1\Big) \\
&= \ f\operatorname{rot}v + (\operatorname{grad}f) \times v,
\end{aligned}$$
womit (1) bewiesen ist.