Lösungen zu Blatt 8 der Übungen zur Vorlesung *Analysis II für Statistiker*, LMU-München, Sommersemester 2011

Florian Hoffmann, Peter Philip

1. Juli 2011

1. (5 Punkte) Die Divergenz sowie die Rotation eines Vektorfelds sind wie folgt definiert:

$$\text{für } v : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N \text{ ist } \operatorname{div} v(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial v_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i}$$

$$\text{für } v : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad v(x,y,z) = \begin{pmatrix} v_x(x,y,z) \\ v_y(x,z,y) \\ v_z(x,z,y) \end{pmatrix}, \text{ ist } \operatorname{rot} v = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

(a) ∇f mit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xyz$

(b) ∇g mit $g : \mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0) \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$

(c) $\operatorname{div} u$ mit $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $u(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{e^{x^2} z}{2} \\ -xzy\, e^{x^2} \\ z \end{pmatrix}$

(d) $\operatorname{rot} v$ mit $v : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $v(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xz \\ 2yz \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$

(e) $\operatorname{div} w$ mit $w : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $w(x,y,z) = \begin{pmatrix} xz - xy \\ xy - yz \\ yz - xz \end{pmatrix}$

Lösung:

$$\nabla f(x,y,z) = (yz, xz, xy)$$
$$\nabla g(x,y,z) = (\frac{-2x}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \frac{-2y}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \frac{-2z}{(x^2+y^2+z^2)^2})$$
$$\operatorname{div} u(x,y,z) = xze^{x^2} - xze^{x^2} + 1 = 1$$
$$\operatorname{rot} v(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2y-2y \\ 2x-2x \\ 0-0 \end{pmatrix} = 0$$

Mit Aufgabe 3 können wir das auch wie folgt berechnen :
$v(x,y,z) = \nabla\phi(x,y,z)$ für $\phi(x,y,z) = (x^2+y^2)z$. Somit ist $\operatorname{rot} v = \operatorname{rot}\nabla\phi = 0$.

$$\operatorname{div} w(x,y,z) = z - y + x - z + y - x = 0$$

2. (5 Punkte) Berechnen Sie die Jacobimatrix und die Jacobideterminante der bei der Definition der Kugelkoordinaten auftretenden Funktion

$$f : G \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(r,\phi,\theta) := (r\cos\phi\sin\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\theta),$$

wobei $G :=]0,\infty[\times]0,2\pi[\times]0,\pi[$ eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ ist.

Lösung : Berechnung der partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned}
&\partial_r f_1(r,\phi,\theta) = \cos\phi\sin\theta, && \partial_\phi f_1(r,\phi,\theta) = -r\sin\phi\sin\theta, && \partial_\theta f_1(r,\phi,\theta) = r\cos\phi\cos\theta,\\
&\partial_r f_2(r,\phi,\theta) = \sin\phi\sin\theta, && \partial_\phi f_2(r,\phi,\theta) = r\cos\phi\sin\theta, && \partial_\theta f_2(r,\phi,\theta) = r\sin\phi\cos\theta,\\
&\partial_r f_3(r,\phi,\theta) = \cos\theta, && \partial_\phi f_3(r,\phi,\theta) = 0, && \partial_\theta f_3(r,\phi,\theta) = -r\sin\theta.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Jacobimatrix

$$J_f(r,\phi,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\phi\sin\theta & -r\sin\phi\sin\theta & r\cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi\sin\theta & r\cos\phi\sin\theta & r\sin\phi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}$$

sowie für die Jacobideterminante

$$\begin{aligned}
\det J_f(r,\phi,\theta) &= -r^2\cos\phi\sin\theta\cos\phi\sin\theta\sin\theta - r^2\sin\phi\sin\theta\sin\phi\cos\theta\cos\theta\\
&\quad - r^2\cos\phi\cos\theta\cos\phi\sin\theta\cos\theta - r^2\sin\phi\sin\theta\sin\phi\sin\theta\sin\theta\\
&= -r^2(\cos^2\phi\sin^3\theta + \sin^2\phi\cos^2\theta\sin\theta + \cos^2\phi\cos^2\theta\sin\theta + \sin^2\phi\sin^3\theta)\\
&= -r^2\sin\theta(\cos^2\phi\sin^2\theta + \sin^2\phi\cos^2\theta + \cos^2\phi\cos^2\theta + \sin^2\phi\sin^2\theta)\\
&= -r^2\sin\theta\big(\cos^2\phi(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + \sin^2\phi(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\big)\\
&= -r^2\sin\theta
\end{aligned}$$

3. (5 Punkte) Zeigen Sie, dass für alle $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$, also für alle zweimal stetig differenzierbaren, reellwertigen Funktionen auf dem $\mathbb{R}^3$ gilt:

$$\operatorname{rot} \nabla f = 0$$

Lösung : Da die zweiten partiellen Ableitungen von f stetig sind, können sie nach Theorem 2.12 vertauscht werden. Wir haben somit:

$$\operatorname{rot} \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. (5 Punkte) Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Berechnen Sie zunächst ∇f. Zeigen Sie nun durch Nachrechnen, dass die zweiten partiellen Ableitungen von f in $(0,0)$ nicht vertauschen. Berechnen Sie hierzu also $\partial_y \partial_x f(0,0)$ und $\partial_x \partial_y f(0,0)$ und vergleichen die Ergebnisse. Was können Sie hieraus in Kombination mit Aufgabe 3 lernen?

Lösung :
Es ist $\operatorname{grad} f(x,y) = (\partial_x f(x,y), \partial_y f(x,y))$ mit

$$\partial_x f(x,y) = \begin{cases} \frac{(3yx^2-y^3)(x^2+y^2)-2x^2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0), \end{cases} \tag{1}$$

sowie

$$\partial_y f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x^3-3xy^2)(x^2+y^2)-2xy^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0), \end{cases} \tag{2}$$

wobei jeweils für $(x,y) \neq (0,0)$ die eindimensionale Quotientenregel benutzt wurde. Zur Berechnung von $\partial_x f(0,0) = 0$ wurde benutzt, dass $f(x,0) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und zur Berechnung von $\partial_y f(0,0) = 0$ wurde benutzt, dass $f(0,y) = 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$.

Aus (1) folgt nun, dass für $y \neq 0$ gilt: $\partial_x f(0,y) = -y^5/y^4 = -y$. Also $\partial_x f(0,y) = -y$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Daraus folgt wiederum, dass $\partial_y \partial_x f(0,y) = -1$ für alle $y \in \mathbb{R}$, also insbesondere $\partial_y \partial_x f(0,0) = -1$.

Aus (2) folgt entsprechend, dass für $x \neq 0$ gilt: $\partial_y f(x,0) = x^5/x^4 = x$. Also folgt weiter $\partial_x f(x,0) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Daraus folgt wiederum, dass $\partial_x \partial_y f(x,0) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also insbesondere $\partial_x \partial_y f(0,0) = 1$.
Vergleich mit Aufgabe 3 zeigt, dass man nicht einfach voraussetzen darf, dass partielle Ableitungen vertauschen. Falls diese stetig sind, ist das jedoch der Fall, wie in Theorem 2.12 genauer nachzulesen ist.