

Lösungen zu Blatt 7 der Übungen zur Vorlesung
Analysis II für Statistiker,
LMU-München, Sommersemester 2011

Florian Hoffmann, Peter Philip

24. Juni 2011

1. (5 Punkte)

- (a) Es sei $x = (1, 3, 5, 1, 1)$. Finden Sie ein $y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$ so, dass $y_1 \neq 0, y_2 \neq 0, y_3 \neq 0, y_4 \neq 0, y_5 \neq 0$ und $y \perp x$ bezüglich des euklidischen Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^5$.
- (b) Es seien $x = (2, 4, 0)$ und $y = (3, 3, 1)$. Finden Sie ein $z = (z_1, z_2, z_3)$ so, dass $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0, z_3 \neq 0$ und sowohl $z \perp x$ als auch $z \perp y$ bezüglich des euklidischen Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^3$.

Lösung :

zu a) :

Wir können y aus dem 4 dimensionalen Raum, auf dem x senkrecht steht bis auf die Einschränkung $y_i \neq 0$ beliebig wählen. Ein mögliches y ergibt sich also wie folgt. Wähle $y = (1, 1, 1, 1, y_5)$, die Komponente y_5 bestimmt sich nun aus der Forderung der Orthogonalität $x \perp y$ also $\langle x, y \rangle = 0$:

$$\langle x, y \rangle = 1 + 3 + 5 + 1 + 1 \cdot y_5 = 10 + y_5 = 0$$

also $y = (1, 1, 1, 1, -10)$

zu b) : Wir können eine Komponente von z frei wählen. Wir wählen $z_1 = 1$. Dann haben wir die bestimmenden Gleichungen:

$$\langle x, z \rangle = 2 + 4z_2 + 0 = 0$$

und

$$\langle y, z \rangle = 3 + 3z_2 + z_3 = 0$$

also $z_2 = -\frac{1}{2}$ und $z_3 = -\frac{3}{2}$ und somit $z = (1, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$

2. (5 Punkte) Finden Sie zwei Metriken auf $\mathbb{R}^n$, die nicht äquivalent sind, und begründen Sie Ihre Auswahl (wenn Sie Ihre Metriken geschickt wählen, lässt sich die Aufgabe in weniger als 5 Zeilen lösen).

Lösung :

Sei d_1 die diskrete Metrik auf $\mathbb{R}^n$ und d_2 die euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^n$. Bezüglich der diskreten Metrik ist jede Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ offen, also auch $\{0\}$. Jedoch ist $\{0\}$ nicht d_2 -offen, da zum Beispiel jede d_2 - ϵ -Kugel um 0 den Punkt $y := (\epsilon/2, 0, \dots, 0) \neq 0$ enthält. Da somit $\{0\}$ offen bezüglich d_1 ist, jedoch nicht offen bezüglich d_2 , sind d_1 und d_2 nicht äquivalent.

3. (5 Punkte) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

stetig auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist.

Lösung :

Die Funktion $h(x, y) = x^2 + y^2$ ist stetig als Summe von Monomen, somit ist für $(x, y) \neq (0, 0)$ ihre Verknüpfung mit der Funktion $g(z) = \frac{1}{z}$ ebenfalls stetig. Analoges gilt für die Verknüpfung $\exp(-g(h(x, y)))$ für $(x, y) \neq (0, 0)$. Somit ist f außerhalb von $(0, 0)$ stetig als Produkt stetiger Funktionen.

Um die Stetigkeit in $(0, 0)$ zu zeigen genügt es zu beweisen, dass für alle Folgen $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$, $(x_n, y_n) \rightarrow (0, 0)$ für $n \rightarrow \infty$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = f(0, 0) = 0$. Für eine beliebige solche Nullfolge (x_n, y_n) ist

$$0 \leq f(x_n, y_n) = \frac{1}{(x_n^2 + y_n^2) e^{\frac{1}{x_n^2 + y_n^2}}} = \frac{1}{(x_n^2 + y_n^2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{x_n^2 + y_n^2}\right)^k} = \quad (1)$$

$$= \frac{1}{(x_n^2 + y_n^2) + 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} \left(\frac{1}{x_n^2 + y_n^2}\right)^k} \quad (2)$$

Geht nun $(x_n, y_n) \rightarrow (0, 0)$ verschwindet der erste Term im Nenner und die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} \left(\frac{1}{x_n^2 + y_n^2}\right)^k$ wächst über alle Schranken. Der Ausdruck (2) geht also von oben gegen Null. Somit $f(x_n, y_n) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Etwas einfacher sieht die Funktion f aus, wenn wir bemerken, dass $x^2 + y^2$ genau das Quadrat des euklidischen Abstands vom Ursprung ist. Ein Wechsel auf Polarkoordinaten $r \in \mathbb{R}^+$, $\phi \in [0, 2\pi)$ mit $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$ führt also zu $f(r, \phi) = f(r) = \frac{1}{r^2} e^{-\frac{1}{r^2}}$. Die Argumentation läuft in diesem Falle jedoch genau so wie oben.

4. (5 Punkte) Sei wie auf Blatt 6 Aufgabe 4 $\mathcal{X}$ der reelle Vektorraum der reellen Folgen, die schließlich konstant Null sind, das heißt, eine reelle Folge $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, ist genau dann ein Element von $\mathcal{X}$, wenn es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $x_n = 0$ für alle $n \geq N$. Für $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{X}$ und $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{X}$ können wir ein Skalarprodukt durch

$$\langle x, y \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

definieren.

Zeigen Sie, dass die Folge $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{X}$ mit

$$x_n^k := \begin{cases} (1/2)^n & \text{für } 1 \leq n \leq k, \\ 0 & \text{für } n > k \end{cases} \quad (3)$$

bezüglich der vom Skalarprodukt induzierten Norm eine Cauchyfolge in $\mathcal{X}$ ist (geometrische Reihe!), die in $\mathcal{X}$ nicht konvergiert. Dies zeigt, dass $\mathcal{X}$ nicht vollständig (also kein Hilbertraum) ist.

Lösung :

Sei $\|\cdot\|$ die vom obigen Skalarprodukt induzierte Norm auf $\mathcal{X}$. Für $k, l \in \mathbb{N}$ mit $l \geq k$ rechnet man

$$\begin{aligned} \|x^k - x^l\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} (x_n^k - x_n^l)^2 = \sum_{n=k+1}^l \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^n \right)^2 = \sum_{n=k+1}^l \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ &< \sum_{n=k}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n \right) - \left(\sum_{n=0}^{k-1} \left(\frac{1}{4}\right)^n \right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} - \frac{1 - (\frac{1}{4})^k}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= \frac{4}{3} \frac{1}{4^k}. \end{aligned} \quad (4)$$

Also gilt $\|x^k - x^l\| < a_k$ mit $a_k := 2/(2^k \sqrt{3})$, also $a_k \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$. Daraus folgt, dass $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $a_k < \epsilon$ für alle $k > N$. Sind $k, l > N$, so ist $\|x^k - x^l\| < a_{\min\{k, l\}} < \epsilon$.

Sei nun $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{X}$ beliebig. Dann gibt es $N_y \in \mathbb{N}$ so, dass $y_n = 0$ für alle $n > N_y$. Also ist für alle $k > N_y$:

$$\|x^k - y\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n^k - y_n)^2 \geq \sum_{n=N_y+1}^{\infty} |x_n^k|^2 \geq \left(\frac{1}{4}\right)^{N_y+1} > 0. \quad (5)$$

Da diese Zahl von k unabhängig ist, kann $\|x^k - y\|$ nicht gegen Null konvergieren, also kann $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ nicht gegen y konvergieren. Da $y \in \mathcal{X}$ beliebig war, ist gezeigt, dass $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{X}$ gar nicht konvergieren kann.