Lösungen zu Blatt 6 der Übungen zur Vorlesung *Analysis II für Statistiker*, LMU-München, Sommersemester 2011

Florian Hoffmann, Peter Philip

17. Juni 2011

1. (5 Punkte) Wie in Aufgabe 2 Blatt 2 ist die p-Norm für $x \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$ definiert als

$$\|x\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \ldots + |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

sowie die Maximumsnorm als

$$\|x\|_{\max} := \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$$

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

Lösung :

(a) $\|(2,5,7,8,3)\|_{\max} = 8$

(b) $\|(2,2,2,2,2,2)\|_2 = \sqrt{|2|^2 + |2|^2 + |2|^2 + |2|^2 + |2|^2 + |2|^2} = \sqrt{24}$

(c) $\|(2,-2,2,-2,2,-2)\|_1 = |2| + |-2| + |2| + |-2| + |2| + |-2| = 12$

(d) $\|(4,9,25,16,36,100)\|_{\frac{3}{2}} = \left(|4|^{\frac{3}{2}} + |9|^{\frac{3}{2}} + |25|^{\frac{3}{2}} + |16|^{\frac{3}{2}} + |36|^{\frac{3}{2}} + |100|^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} =$
$= \left(8 + 27 + 125 + 64 + 216 + 1000\right)^{\frac{2}{3}} = \left(1440\right)^{\frac{2}{3}} \approx 127,52$

(e) $\|(10^{-3}, 1000, 10^{-6})\|_{\frac{7}{3}} = \left(10^{-7} + 10^7 + 10^{-14}\right)^{\frac{3}{7}} \approx 1000$

(f) $\|(-10,4,-5,3,2,3)\|_{\max} = 10$

(g) $\|(\cos\alpha\sin\beta,\ \sin\alpha\sin\beta,\ \cos\beta)\|_2 = \sqrt{\cos^2\alpha\sin^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta + \cos^2\beta} =$
$= \sqrt{(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)\sin^2\beta + \cos^2\beta} = \sqrt{\sin^2\beta + \cos^2\beta} = 1$

(h) $\|(3,4,2,1,7,9)\|_3 = \left(3^3 + 4^3 + 2^3 + 1^3 + 7^3 + 9^3\right)^{\frac{1}{3}} = \left(1172\right)^{\frac{1}{3}} \approx 10,54$

2. (5 Punkte) Die drei Funktionen

$$f_1 : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad f_1(x) = \sqrt{\frac{1}{2}}$$
$$f_2 : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad f_2(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x$$
$$f_3 : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad f_3(x) = \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2-1)$$

spannen einen 3-dimensionalen Vektorraum $\mathcal{V}_3$ auf. Auf diesem definieren wir ein Skalarprodukt für alle $f, g \in \mathcal{V}_3$ durch

$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

Prüfen Sie durch Nachrechnen, dass die Funktionen f_1, f_2, f_3 paarweise orthogonal zueinander (also paarweise aufeinander senkrecht stehen) und in der durch das Skalarprodukt erzeugten Norm auf Eins normiert sind, also

$$\langle f_i, f_j\rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad i = j \\ 0 & \text{falls} \quad i \neq j \end{cases}$$

Lösung : Viele der Integrale lassen sich aus Symmetrieüberlegungen sofort als Null erkennen.

$$\langle f_1, f_1\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}dx = 1\,,$$
$$\langle f_2, f_2\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{3}{2}x^2dx = \frac{1}{2}x^3\Big|_{-1}^{1} = 1\,,$$
$$\langle f_3, f_3\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{5}{8}(3x^2-1)^2dx = \frac{5}{8}\int_{-1}^{1} 9x^4 - 6x^2 + 1\,dx = \frac{5}{8}\left[\frac{9}{5}x^5 - 2x^3 + x\right]_{-1}^{1}$$
$$= \frac{9}{4} - \frac{10}{4} + \frac{5}{4} = 1$$
$$\langle f_1, f_2\rangle = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{3}{4}}xdx = 0\,,$$
$$\langle f_1, f_3\rangle = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{8}}(3x^2-1)dx = \sqrt{\frac{5}{16}}\left[x^3 - x\right]_{-1}^{1} = 0\,,$$
$$\langle f_2, f_3\rangle = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{8}}(3x^3-x)dx = 0$$

3. (5 Punkte) Auf dem Vektorraum der stetigen, beschränkten Funktionen über einem Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ lässt sich eine p-Norm, ähnlich der auf $\mathbb{R}^n$, wie folgt definieren:

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:
Lösung:

(i) Für $[a, b] = [0, 2\pi]$

(a) $\|\cos(x)\|_2 = \left(\int_0^{2\pi} \cos^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) dx \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}$

(b) $\|\sin(x)\|_1 = \int_0^{2\pi} |\sin(x)| dx = 2 \cdot \int_0^{\pi} \sin(x) = -2\cos(x)\Big|_0^{\pi} = 4$

(ii) und für $[a, b] = [-1, 1]$

(a) $\|\sqrt{\frac{7}{8}}(5x^3 - 3x)\|_2 = \left(\frac{7}{8} \int_{-1}^{1} (5x^3 - 3x)^2 \right)^{\frac{1}{2}} =$
$\left(\frac{7}{8} \int_{-1}^{1} (25x^6 - 30x^4 + 9x^2) \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{8} \left[25x^7 - 42x^5 + 21x^3 \right]_{-1}^{1} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$

(b) $\|e^{-x^2} x\|_1 = \int_{-1}^{1} |xe^{-x^2}| dx = 2 \int_0^1 xe^{-x^2} dx = -\int_0^1 (\frac{d}{dx} e^{-x^2}) dx = e^{-x^2}\Big|_1^0 = 1 - \frac{1}{e}$

4. (5 Punkte) Sei $\mathcal{X}$ der reelle Vektorraum der reellen Folgen, die schließlich konstant Null sind, das heißt, eine reelle Folge $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, ist genau dann ein Element von $\mathcal{X}$, wenn es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $x_n = 0$ für alle $n \geq N$. Für $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X}$ und $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X}$ können wir ein Skalarprodukt durch

$$\langle x, y\rangle := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

definieren. Berechnen Sie nun das Skalarprodukt der folgenden Vektoren $x, y \in \mathcal{X}$.
Hinweis: Denken Sie an die geometrische Reihe bzw. fassen Sie Summanden klug zusammen um das Ergebnis direkt angeben zu können.
Lösung :

(a) $x_n = \begin{cases} (\frac{1}{6})^n & \text{für} \quad n \leq 99 \\ 0 & \text{für} \quad n \geq 100 \end{cases} \quad , \quad y_n = \begin{cases} (\frac{1}{2})^n & \text{für} \quad n \leq 50 \\ 6^n & \text{für} \quad 50 < n \leq 100 \\ 0 & \text{für} \quad n > 100 \end{cases}$

$$\langle x, y\rangle := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = \sum_{n=1}^{50} \left(\frac{1}{12}\right)^n + \sum_{n=51}^{99} 1^n = \frac{1-(\frac{1}{12})^{51}}{1-\frac{1}{12}} - 1 + 49 \approx 49\frac{1}{11}$$

(b) $x_n = \begin{cases} n & \text{für} \quad n \leq 120 \\ 0 & \text{für} \quad n > 120 \end{cases} \quad , \quad y_n = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad n \leq 100 \\ 0 & \text{für} \quad n > 100 \end{cases}$

$$\langle x, y\rangle := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n. = \sum_{n=1}^{100} n = 1+100+2+99+3+98+\ldots+50+51 = \frac{100}{2}101 = 5050$$