Lösung zu Blatt 5 der Übungen zur Vorlesung *Analysis II für Statistiker*, LMU-München, Sommersemester 2011

Florian Hoffmann, Peter Philip

10. Juni 2011

1. (5 Punkte) Betrachten Sie die folgenden zehn Funktionen und untersuchen Sie, welche der Funktionen konvex, streng konvex, konkav, streng konkav sind (dabei können mehrere Eingenschaften gleichzeitig zutreffen oder auch gar keine). Fertigen Sie eine Tabelle an, in der Sie für jede Funktion und für jede Eigenschaft eintragen, ob sie erfüllt ist. Hier brauchen Sie keine Beweise angeben, sodern nur die Ergebnisse eintragen.

$$
\begin{array}{ll}
f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, & f_1(x) := x^4, \\
f_2 :]-1,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, & f_2(x) := 7, \\
f_3 : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}, & f_3(x) := \sqrt[3]{x}, \\
f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, & f_4(x) := x^3, \\
f_5 : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}, & f_5(x) := x^3, \\
f_6 : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}, & f_6(x) := \cos(x), \\
f_7 : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}, & f_7(x) := \cos(x), \\
f_8 : [\pi, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}, & f_8(x) := \sin(x), \\
f_9 : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, & f_9(x) := \begin{cases} 5 & \text{für } x = -1, \\ -x & \text{für } -1 < x < 1, \\ 5 & \text{für } x = 1, \end{cases} \\
f_{10} : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}, & f_{10}(x) := \begin{cases} 3 & \text{für } x = 0, \\ -x^3 & \text{für } x > 0 \end{cases}
\end{array}
$$

Lösung :

	konvex	streng konvex	konkav	streng konkav
f_1	+	+	−	−
f_2	+	−	+	−
f_3	−	−	+	+
f_4	−	−	−	−
f_5	+	+	−	−
f_6	−	−	−	−
f_7	−	−	+	+
f_8	+	+	−	−
f_9	+	−	−	−
f_{10}	−	−	−	−

Tabelle 1: Lösung zu Aufgabe 1

2. (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

in $(0,0)$ nicht stetig ist.

Lösung :

Wäre f in $(0,0)$ stetig, so müßte für jede Nullfolge $(x_n, y_n) \to (0,0)$ gelten $f(x_n, y_n) \to f(0,0) = 0$ für $n \to \infty$. Wählen wir hierzu $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, was offenbar gegen $(0,0)$ konvergiert. Jedoch ist

$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Somit ist f nicht stetig in $(0,0)$.

3. (5 Punkte)

   Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \subset \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und die erste Ableitung f' von f sei beschränkt, $\sup_{x \in I} |f'(x)| < \infty$.
   Zeigen Sie, dass f lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante $L = \sup_{x \in I} |f'(x)|$ ist.
   Hinweis: Benutzen Sie den Mittelwertsatz.

   Lösung :

   Seien $x, y \in I$ und $\xi \in]x, y[$. Der Mittelwertsatz liefert

   $$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x - y| \leq \sup_{\xi \in I} |f'(\xi)||x - y|$$

   Wählen wir $L = \sup_{\xi \in I} |f'(\xi)|$ folgt, dass f lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante $\sup_{\xi \in I} |f'(\xi)|$ ist.

4. (5 Punkte)

   Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Vektorräume sowie $A : X \longrightarrow Y$ linear und stetig. Man nennt den Ausdruck

   $$\|A\| := \sup \Big\{ \|A(x)\|_Y : x \in X \text{ und } \|x\|_X = 1 \Big\}, \tag{1}$$

   die Operatornorm von A. Es ist $\|A\| < \infty$, außerdem erfüllt $\|A\|$ die üblichen Eigenschaften einer Norm (kein Beweis erforderlich).
   Betrachten Sie nun die durch die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ gegebene lineare Abbildung

   $$A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad A(x) = Ax$$

   (a) Berechnen Sie die Operatornorm von A für den Fall, dass $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ mit der 1-Norm, $\|y\|_1 = |y_1| + |y_2|$ bzw. $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + |x_3|$, versehen werden.

   (b) Berechnen Sie Operatornorm von A für den Fall, dass $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ beide mit der max-Norm, $\|y\|_{\max} = \max\{|y_1|, |y_2|\}$ und $\|x\|_{\max} = \max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\}$, versehen werden.

   Hinweis: Schätzen Sie $\|A\|$ jeweils klug nach oben und unten ab.

Lösung : (a) Sei $x \in \mathbb{R}^3$ mit $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + |x_3| = 1$. Dann ist

$$\|A(x)\|_1 = 2|x_1 + 2x_2 + 3x_3| \leq 6\|x\|_1 = 6 \tag{2}$$

also $\|A\| \leq 6$. Betrachten wir nun den Vektor $(0, 0, 1)$. Es gilt $\|(0, 0, 1)\|_1 = 1$ und $\|A(0, 0, 1)\|_1 = \|(3, 3)\|_1 = 6$. Da $\|A\|$ die kleinste obere Schranke von $\|A(x)\|_1$ auf allen Einheitsvektoren ist, muss also auch gelten $\|A\| \geq 6$ und somit ist $\|A\| = 6$.

(b) Sei $x \in \mathbb{R}^3$ mit $\|x\|_{\max} = \max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\} = 1$. Dann ist

$$\|A(x)\|_{\max} = |x_1 + 2x_2 + 3x_3| \leq 6\|x\|_{\max} = 6, \tag{3}$$

also $\|A\| \leq 6$. Nehmen wir nun den Vektor $(1, 1, 1)$. Es gilt $\|(1, 1, 1)\|_{\max} = 1$ und $\|A(1, 1, 1)\|_{\max} = \|(6, 6)\|_{\max} = 6$. Es ist also auch $\|A\| \geq 6$ und somit $\|A\| = 6$.