

Lösung zu Blatt 4 der Übungen zur Vorlesung
Analysis II für Statistiker,
LMU-München, Sommersemester 2011

Florian Hoffmann, Peter Philip

3. Juni 2011

1. (5 Punkte)

- (a) Es sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \exp(x)$, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) := -x^2 - 2$. Geben Sie explizite Formeln für $(f + g)(x)$, $(fg)(x)$, $(f/g)(x)$, $\max(f, g)(x)$, $\min(f, g)(x)$, $g^+(x)$, $g^-(x)$, $(g \circ f)(x)$ und $(f \circ g)(x)$ an.
- (b) Wie lauten die Koordinatenfunktionen von

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) := (yx^3, \exp(-yz^2), |x + y + z|^3) ?$$

Lösung :

(a)

$$(f + g)(x) = \exp(x) - x^2 - 2 \tag{1}$$

$$(fg)(x) = -\exp(x)(x^2 + 2) \tag{2}$$

$$(f/g)(x) = -\frac{\exp(x)}{x^2 + 2} \tag{3}$$

$$\max(f, g)(x) = \exp(x) \tag{4}$$

$$\min(f, g)(x) = -x^2 - 2 \tag{5}$$

$$g^+(x) = 0 \tag{6}$$

$$g^-(x) = x^2 + 2 \tag{7}$$

$$(g \circ f)(x) = -(\exp(x))^2 - 2 \tag{8}$$

$$(f \circ g)(x) = \exp(-x^2 - 2) \tag{9}$$

(b) Die Koordinatenfunktionen erhalten wir durch Projektion, also

$$f_1(x, y, z) = (\pi_1 \circ f)(x, y, z) = yx^3$$

$$f_2(x, y, z) = (\pi_2 \circ f)(x, y, z) = \exp(-yz^2)$$

$$f_3(x, y, z) = (\pi_3 \circ f)(x, y, z) = |x + y + z|^3$$

2. (5 Punkte)

Bestimmen Sie für jede der folgenden drei Funktionen, ob sie im angegebenen Punkt ξ einen Grenzwert besitzt und beweisen Sie jeweils Ihr Ergebnis.

(a) $f :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}, f(x) := \cos(1/x), \xi := 0$.

(b) $f :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}, f(x) := x \cos(1/x), \xi := 0$.

(c) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, f(r, \phi, \theta) := (r \cos \phi \sin \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \theta), \xi := (0, 0, 0)$.

Lösung :

Zu (a)

Für $k \in \mathbb{N}$ setze $x_k := 1/(k\pi + \frac{\pi}{2})$ und $y_k := 1/(2k\pi)$. Dann sind $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}^+$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = 0$. Andererseits gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \cos(k\pi + \frac{\pi}{2}) = 0$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} f(y_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \cos(2k\pi) = 1$. Da die Folgen verschiedene Grenzwerte haben, existiert der Grenzwert von $f(x)$ für $x \rightarrow 0$ nicht.

Zu (b)

Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^+$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$. Aus $-1 \leq \cos(1/x_k) \leq 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ folgt $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k \cos(1/x_k) = 0$, also $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = 0$. Somit ist 0 Grenzwert von $f(x)$ für $x \rightarrow 0$.

Zu (c)

Seien $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}, (\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}, (\theta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ reelle Folgen mit $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \phi_k = 0$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} \theta_k = 0$.

Dann folgt

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \sin \theta_k &= 0, & \lim_{k \rightarrow \infty} \cos \theta_k &= 1 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \sin \phi_k &= 0, & \lim_{k \rightarrow \infty} \cos \phi_k &= 1 \end{aligned}$$

also $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k \cos \theta_k = 0$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k \sin \phi_k \cos \theta_k = 0$, sowie auch $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k \cos \phi_k \sin \theta_k = 0$, also insgesamt $\lim_{k \rightarrow \infty} f(r_k, \phi_k, \theta_k) = (0, 0, 0)$. Somit ist $(0, 0, 0)$ Grenzwert von $f(x)$ für $x \rightarrow (0, 0, 0)$.

3. (5 Punkte)

Zeigen Sie durch Benutzung von Sätzen aus der Vorlesung, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) := \ln(1 + \sqrt{|xy + z|})$, stetig ist (dabei dürfen Sie die Stetigkeit der eindimensionalen Funktionen $t \mapsto \ln t, t \mapsto \sqrt{t} (t \geq 0)$ und $t \mapsto |t|$ ohne Beweis benutzen).

Lösung auf der nächsten Seite

Lösung:

- Das Polynom $P : (x, y, z) \mapsto xy + z$ ist stetig als Summe von Produkten von Monomen.
- Wir haben somit, dass $|\cdot| \circ P$ als Verknüpfung stetiger Funktionen stetig ist.
- Da $|xy + z| \geq 0$ ist $\sqrt{|xy + z|}$ definiert und als Verknüpfung stetiger Funktionen wieder stetig.
- Die konstante Funktion 1 ist stetig, somit ist die Summe $1 + \sqrt{\cdot} \circ |\cdot| \circ P$ wieder stetig.
- Da $1 + \sqrt{|xy + z|} > 0$, ist der $\ln$ hiervon definiert und somit die Verknüpfung $\ln \circ (1 + \sqrt{\cdot} \circ |\cdot| \circ P)$ wieder stetig,

also ist $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = \ln(1 + \sqrt{|xy + z|})$ stetig.

4. (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x}$$

gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}_0^+$ ist. Anleitung:

Zeigen Sie zunächst, dass $\sqrt{|x - y|} < \sqrt{x} + \sqrt{y}$ für beliebige $x, y \in \mathbb{R}^+$, und benutzen Sie diese Ungleichung dann, um zu beweisen, dass für $\epsilon > 0$ aus $|x - y| < \delta := \epsilon^2$ folgt, dass $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \epsilon$.

Lösung:

Zum Beweis der Ungleichung seien $x, y > 0$. Dann gilt

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 < (x + y)^2 < (x + 2\sqrt{xy} + y)^2.$$

Wurzelziehen liefert

$$|x - y| < x + 2\sqrt{xy} + y = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2.$$

Erneutes Wurzelziehen liefert $\sqrt{|x - y|} < \sqrt{x} + \sqrt{y}$. Sei nun $\epsilon > 0$, $\delta := \epsilon^2$ sowie $x, y \in \mathbb{R}^+$. Für $|x - y| < \delta$ folgt

$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{|x - y|}\sqrt{|x - y|}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} < \sqrt{|x - y|} < \sqrt{\delta} = \epsilon,$$

was die gleichmäßige Stetigkeit von f beweist.