# Lösungen zu Blatt 2 der Übungen zur Vorlesung *Analysis II für Statistiker*, LMU-München, Sommersemester 2011

Florian Hoffmann

21. Mai 2011

1. (5 Punkte) Für einen metrischen Raum $(X, d)$ und einen Punkt $a \in X$, $r > 0$ heißt

$$B_r(a) = \{x \in X : d(a, x) < r\}$$

die offene $r$-Kugel um $a$. Zeigen Sie, dass $B_r(a)$ eine offene Teilmenge von $X$ ist.

**Lösung :**

Sei hierzu $x \in B_r(a)$ beliebig. Setzen wir $\varepsilon = r - d(a, x)$, so ist $\varepsilon > 0$. Für jedes $y \in B_\varepsilon(x)$ haben wir nun $d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < r - \varepsilon + \varepsilon = r,$ wobei im ersten Schritt die Dreiecksungleichung benutzt wurde. Somit liegt die offene $\epsilon$-Kugel um $x$ in $B_r(a)$, also $B_\varepsilon(x) \subseteq B_r(a)$. Das heißt, für jedes $x \in B_r(a)$ gibt es eine offene Umgebung von Punkten, die ganz in $B_r(a)$ liegt und somit ist $B_r(a)$ offen.

2. (5 Punkte) Die $p$-Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist für $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$ definiert als

$$\|x\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \ldots + |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

(i) Skizzieren Sie die Einheitskugel bezüglich der $p$-Norm im $\mathbb{R}^2$, also die Menge $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_p \leq 1\}$, für $p = 1$ und $p = 2$.

**Lösung :** siehe Bild auf der letzten Seite.

(ii) Eine weitere wichtige Norm ist die Maximumsnorm

$$\|x\|_{\max} := \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$$

Zeigen Sie, dass diese Norm mit der $p$-Norm in folgendem Verhältnis steht

$$\|x\|_{\max} \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_{\max}$$

und zeichnen Sie, wie unter (i), die Einheitskugel in der Maximumsnorm, also die Menge $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_{\max} \leq 1\}$.

**Lösung :** Da alle $|x_i| \geq 0\,,\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ haben wir auf jeden Fall

$$\|x\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \ldots + |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq \max_{i=1,2,\ldots,n} |x_i| = \|x\|_{\max}$$

Um die Abschätzung nach oben zu erhalten bemerken wir, dass nach Definition des Maximums $|x_k| \leq \max_i |x_i|$ für alle $k$. Wenn wir also jedes der $|x_1|, |x_2| \ldots, |x_n|$ durch den größten vorkommenden Wert, also $\max_i |x_i|$, ersetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|x\|_p &= \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \ldots + |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left((\max_i |x_i|)^p + (\max_i |x_i|)^p + \ldots + (\max_i |x_i|)^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(n \cdot (\max_i |x_i|)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= n^{\frac{1}{p}} \|x\|_{\max}
\end{aligned}$$

3. (5 Punkte)

Berechnen Sie folgende Grenzwerte. Sie dürfen die entsprechenden Sätze aus der Vorlesung ohne Beweis verwenden. In Teil (ii) war auf der Angabe ein Tippfehler. Es hieß dort $\sqrt[n]{\sqrt{n}}$, wobei der Limes über $k$ zu bilden war. Gemeint war jedoch $\sqrt[k]{\sqrt{k}}$. Natürlich wird dies bei der Korrektur berücksichtigt.

(i)

$$\lim_{k\to\infty} \left( \begin{pmatrix} 1 + \frac{(-1)^k}{k} \\ \sin(k^{-1}\pi) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -e^{\frac{1}{k}} \\ (\cos(k^{-1}\pi))^2 \end{pmatrix} \right)$$

(ii)

$$\lim_{k\to\infty} \left\{ \left[ \begin{pmatrix} \frac{(k+1)^2}{k^2-1} \\ \frac{1}{k}\sin(k^2) \end{pmatrix} + \pi \begin{pmatrix} \ln(1+e^{-k}) \\ k^{-\frac{1}{k}} \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} \sqrt[k]{\sqrt{k}} \\ \arctan(\frac{1}{k+1}) \end{pmatrix} \right\}$$

(iii)

$$\lim_{k\to\infty} \left| \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{k} (-1)^n \frac{(\pi)^{2n}}{(2n)!} \\ \sum_{n=0}^{k} (-1)^n \frac{(\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{pmatrix} \right|$$

**Lösung:**
Nach Lemma (1.15) aus der Vorlesung haben wir:

(i)
$$\lim_{k\to\infty}\left(\begin{pmatrix}1+\frac{(-1)^k}{k}\\ \sin(k^{-1}\pi)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-e^{\frac{1}{k}}\\ (\cos(k^{-1}\pi))^2\end{pmatrix}\right)=$$
$$=\lim_{k\to\infty}\begin{pmatrix}1+\frac{(-1)^k}{k}\\ \sin(k^{-1}\pi)\end{pmatrix}+\lim_{k\to\infty}\begin{pmatrix}-e^{\frac{1}{k}}\\ (\cos(k^{-1}\pi))^2\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Da $\lim_{k\to\infty} e^{\frac{1}{k}}=1=\lim_{k\to\infty}(\cos(k^{-1}\pi))^2$.

(ii)
$$\lim_{k\to\infty}\left\{\left[\begin{pmatrix}\frac{(k+1)^2}{k^2-1}\\ \frac{1}{k}\sin(k^2)\end{pmatrix}+\pi\begin{pmatrix}\ln(1+e^{-k})\\ k^{-\frac{1}{k}}\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}\sqrt[k]{\sqrt{k}}\\ \arctan(\frac{1}{k+1})\end{pmatrix}\right\}=$$
$$=\lim_{k\to\infty}\left[\begin{pmatrix}\frac{(k+1)^2}{k^2-1}\\ \frac{1}{k}\sin(k^2)\end{pmatrix}+\pi\begin{pmatrix}\ln(1+e^{-k})\\ k^{-\frac{1}{k}}\end{pmatrix}\right]\cdot\lim_{k\to\infty}\begin{pmatrix}\sqrt[k]{\sqrt{k}}\\ \arctan(\frac{1}{k+1})\end{pmatrix}=$$
$$=\left[\lim_{k\to\infty}\begin{pmatrix}\frac{(k+1)^2}{k^2-1}\\ \frac{1}{k}\sin(k^2)\end{pmatrix}+\pi\lim_{k\to\infty}\begin{pmatrix}\ln(1+e^{-k})\\ k^{-\frac{1}{k}}\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=$$
$$=\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\pi\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=1$$

Da

$$\lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)^2}{k^2-1}=\lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{k-1}=1,$$
$$\lim_{k\to\infty}\ln(1+e^{-k})=\ln(1)=0$$
$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\sqrt{k}}=\sqrt{\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{k}}=\sqrt{1}=1$$

auf Grund der Stetigkeit von $\ln x$ und $\sqrt{x}$.
Außerdem gilt $\lim_{k\to\infty}(1/k\sin(k^2))=0$, da $\sin(x)$ auf $\mathbb{R}$ beschränkt ist.

(iii)

$$\lim_{k\to\infty}\left|\begin{pmatrix}\sum_{n=0}^{k}(-1)^n\frac{(\pi)^{2n}}{(2n)!}\\ \sum_{n=0}^{k}(-1)^n\frac{(\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!}\end{pmatrix}\right| =$$
$$\left|\begin{pmatrix}\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}(-1)^n\frac{(\pi)^{2n}}{(2n)!}\\ \lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}(-1)^n\frac{(\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!}\end{pmatrix}\right| =$$
$$\left|\begin{pmatrix}\cos(\pi)\\ \sin(\pi)\end{pmatrix}\right| = \sqrt{\cos^2(\pi)+\sin^2(\pi)} = 1$$

4. (5 Punkte)

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Zeigen Sie, dass die Norm $\|\cdot\|$ durch

$$d : X \times X \to \mathbb{R}_0^+, \quad d(x,y) := \|x-y\|$$

eine Metrik auf $X$ erzeugt. Mit anderen Worten, zeigen Sie, dass es sich beim so definierten $d(\cdot,\cdot)$ um eine Metrik handelt.

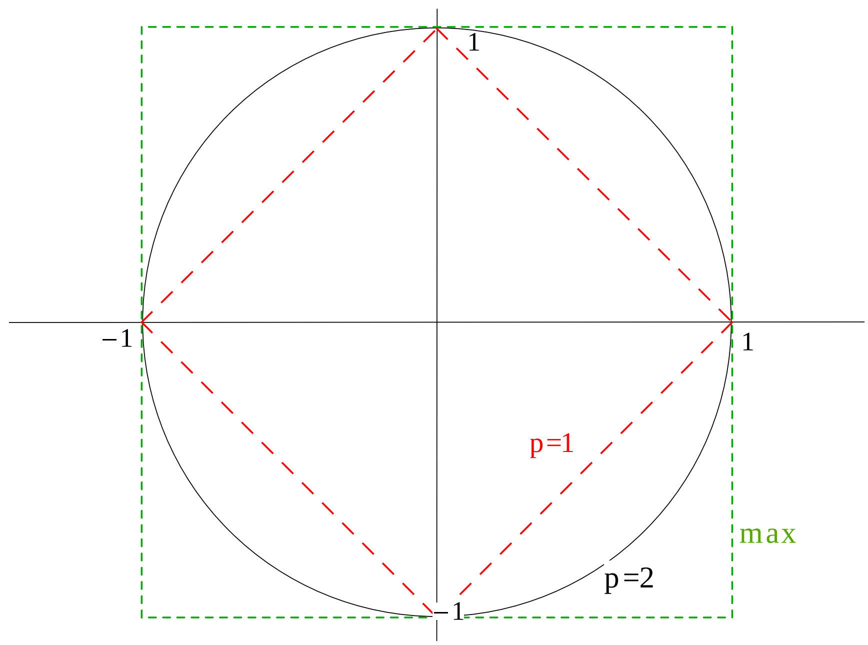
**Lösung:**

Seien $x, y, z \in X$. Ist $x = y$, so folgt $d(x,y) = \|0\| = 0$ nach Def. 1.19 (i). Ist umgekehrt $0 = d(x,y) = \|x-y\|$, so folgt nach Def. 1.19(i) (die Norm ist positiv definit), dass $x - y = 0$, also $x = y$. Um die Symmetrie einzusehen, rechnet man nach

$$d(y,x) = \|y-x\| \overset{\text{Def. 1.19(ii)}}{=} |-1|\,\|x-y\| = d(x,y).$$

Die Dreiecksungleichung folgt aus Def. 1.19(iii), der Dreiecksungleichung der Norm:

$$d(x,y) = \|x-y\| = \|x-z+z-y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\| = d(x,z) + d(z,y).$$


1
−1
1
p=1
max
p=2
−1